

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

#### 3.1. Содержательная задача, приводящая к интегральному уравнению

Рассмотрим трубку длиной  $\ell$ , заполненную веществом, поглощающим и рассеивающим свет. Поместим в левом ее конце стационарный источник, излучающий световой поток с плотностью  $I_0$ , направленный вправо (рис.3.1).

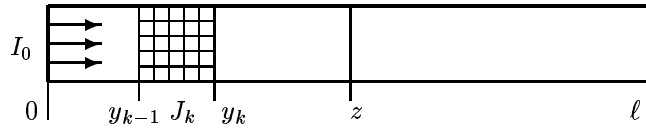


Рис. 1:

Будем считать, что в каждой точке трубки рассеяние светового потока происходит лишь в двух направлениях – вправо и влево. Тогда плотность потока постоянна в каждом поперечном сечении трубки и меняется только вдоль ее оси. Введем функцию  $\varphi : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  – *линейную* плотность светового потока, излучаемого в заданном сечении.

Очевидно, весь световой поток в сечении с абсциссой  $z$  можно разделить на две части: поток от источника излучения (с учетом поглощения и рассеяния в среде) и вторичный поток, созданный рассеивающей средой. Рассмотрим эти слагаемые по отдельности.

1. Плотность первичного потока, согласно закону Бугера<sup>1</sup>, равна

$$\Phi_1(z) = I_0 \cdot \exp(-\mu z)$$

( $\mu$  – показатель ослабления света в среде).

2. Для вычисления плотности вторичного (образованного рассеивающей средой) потока  $\Phi_2(z)$  построим некоторое разбиение  $\mathcal{P}$  сегмента  $[0, \ell]$  и выделим элементарный объем, ограниченный сечениями с абсциссами  $y_{k-1}$  и  $y_k$  (рис.3.1). Обозначим  $J_k = [y_{k-1}, y_k]$  и рассмотрим произвольную точку  $y \in J_k$ .

Если бы линейная плотность потока на  $J_k$  была постоянной и равнялась  $\varphi(y)$ , полное вторичное излучение этого элементарного объема было бы равно  $\varphi(y) \cdot (y_k - y_{k-1})$ . Далее, если бы все это излучение исходило из сечения с абсциссой  $y$ , то его вклад в рассеянный световой поток, получаемый в сечении с абсциссой  $z$ , был бы равен

$$\frac{\rho}{2} \cdot \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \cdot (y_k - y_{k-1})$$

(здесь  $\rho$  – показатель рассеяния среды; множитель  $\frac{1}{2}$  определяется из предположения, что половина рассеянного потока излучается вправо и половина – влево).

Очевидно неравенство

$$m_k \leq \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \leq M_k,$$

где

$$m_k = \inf_{y \in J_k} \{ \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \}, \quad M_k = \sup_{y \in J_k} \{ \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \}.$$

Следовательно, плотность вторичного потока, получаемого в сечении с абсциссой  $z$ , удовлетворяет неравенству

$$\frac{\rho}{2} \cdot \sum_k m_k \cdot (y_k - y_{k-1}) \leq \Phi_2(z) \leq \frac{\rho}{2} \cdot \sum_k M_k \cdot (y_k - y_{k-1}). \quad (3.1.1)$$

Левая и правая части неравенства (3.1.1) представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю суммы Дарбу при разбиении  $\mathcal{P}$  для функции  $\rho/2 \cdot \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y)$ . Поэтому

$$\Phi_2(z) = \frac{\rho}{2} \cdot \int_0^\ell \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \, dy.$$

<sup>1</sup>Пьер БУГЕР (1698-1758) – французский физик и математик, один из основателей фотометрии: член Парижской АН и Лондонского королевского общества.

Теперь уравнение баланса

$$\varphi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$$

принимает вид

$$\varphi(z) = I_0 \cdot \exp(-\mu z) + \frac{\rho}{2} \cdot \int_0^\ell \exp(-\mu|z-y|) \cdot \varphi(y) dy, \quad z \in [0, \ell].$$

### 3.2. Интегральное уравнение Фредгольма

Полученное в п.3.1 интегральное уравнение – пример *уравнения Фредгольма<sup>2</sup> второго рода*

$$x(t) = \int_\alpha^\beta K(t, \tau)x(\tau) d\tau + f(t). \quad (3.2.1)$$

В уравнении (3.2.1)

$x$  – искомая функция  $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ;

$f$  – *свободный член* уравнения – вещественная, непрерывная на  $[\alpha, \beta]$  функция. Если  $f(t) \equiv 0$ , уравнение (3.2.1) называется *однородным*;

$K(t, \tau)$  – вещественная функция, заданная на квадрате  $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ . Она либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода на диагонали квадрата  $t = \tau$  (т.е. непрерывна на каждом из двух треугольников, на которые эта диагональ делит квадрат – рис.3.2). Эту функцию называют *ядром* интегрального уравнения.

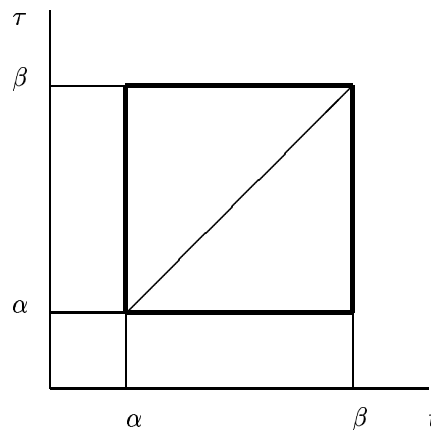


Рис. 2:

Замечание. Уравнением Фредгольма *первого* рода называется уравнение

$$\int_\alpha^\beta K(t, \tau)x(\tau) d\tau + f(t) = 0.$$

Этот тип уравнений мы в нашем пособии не рассматриваем.

Уравнение (3.2.1) можно записать в виде

$$x = \mathcal{A}x + f, \quad (3.2.2)$$

где  $\mathcal{A}$  – *линейный* оператор, преобразующий непрерывную функцию  $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$(\mathcal{A}x)(t) = \int_\alpha^\beta K(t, \tau)x(\tau) d\tau.$$

Уравнение (3.2.2) внешне схоже с одной из форм записи системы линейных алгебраических уравнений. Эта аналогия на самом деле является весьма глубокой. Можно показать, что справедлива аналогичная известной теореме линейной алгебры

<sup>2</sup>Эрик Ивар ФРЕДГОЛЬМ (1866-1927) – шведский математик, член Стокгольмской АН. Известен своими работами по дифференциальным и интегральным уравнениям.

Теорема Фредгольма. Если однородное уравнение Фредгольма имеет *только* нулевое решение:

$$f(t) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0,$$

то соответствующее неоднородное уравнение имеет *единственное* решение при *любом* свободном члене. Если же однородное уравнение имеет *ненулевое* решение, то соответствующее неоднородное уравнение либо неразрешимо, либо имеет бесконечное множество решений.

Пример. Если

$$\int_{\alpha}^{\beta} |K(t, \tau)| d\tau \leq q < 1 \quad \text{при всех } t \in [\alpha, \beta],$$

то однородное уравнение имеет только нулевое решение и, следовательно, неоднородное уравнение имеет единственное решение при любом свободном члене.

Для доказательства выпишем очевидную оценку:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}x)(t)| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} K(t, \tau)x(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \max_{\tau \in [\alpha, \beta]} (|x(\tau)|) \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |K(t, \tau)| d\tau \leq q \cdot \max_{\tau \in [\alpha, \beta]} (|x(\tau)|). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\max_{t \in [\alpha, \beta]} (|(\mathcal{A}x)(t)|) \leq q \cdot \max_{t \in [\alpha, \beta]} (|x(t)|). \quad (3.2.3)$$

Если  $z$  – решение однородного уравнения, то

$$z = \mathcal{A}z \implies \max_{t \in [\alpha, \beta]} (|z(t)|) \leq q \cdot \max_{t \in [\alpha, \beta]} (|z(t)|) \implies z(t) \equiv 0.$$

Замечания. 1. Если в линейном пространстве функций, непрерывных на  $[\alpha, \beta]$ , ввести норму  $\|x\|_C = \max_{t \in [\alpha, \beta]} (|x(t)|)$ , то оценка (3.2.3) показывает, что для любой функции  $x$  из этого пространства  $\|\mathcal{A}x\|_C \leq q \cdot \|x\|_C$ . Отсюда видно, что наше утверждение – аналог теоремы о методе простой итерации для системы линейных алгебраических уравнений.

2. Решение уравнения Фредгольма очень редко удается получить в явной ("замкнутой") форме. Один простой случай рассматривается в следующем пункте.

### 3.3. Решение уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

Ядро уравнения Фредгольма называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(t, \tau) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \psi_k(\tau),$$

где  $\varphi_k, \psi_k; \quad k = 1, \dots, m$  – заданные *вещественные* функции, непрерывные на  $[\alpha, \beta]$ .

Терминологическое замечание. Не следует путать вырожденность ядра уравнения Фредгольма с известным понятием вырожденности квадратной матрицы.

В случае вырожденного ядра уравнение (3.2.1) можно переписать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) \psi_k(\tau) d\tau + f(t)$$

или в виде

$$x = \sum_{k=1}^m \varphi_k \cdot \langle x, \psi_k \rangle + f, \quad (3.3.1)$$

где  $\langle x, \psi_k \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) \psi_k(\tau) d\tau$  – скалярное произведение функций.

Умножив обе части (3.3.1) скалярно на  $\psi_i$ , получим

$$\langle x, \psi_i \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \varphi_k, \psi_i \rangle \langle x, \psi_k \rangle + \langle f, \psi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m$$

или

$$c_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_k + b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.3.2)$$

где  $a_{ik} = \langle \varphi_k, \psi_i \rangle$ ,  $b_i = \langle f, \psi_i \rangle$ ,  $c_i = \langle x, \psi_i \rangle$ .

Итак, если  $x$  – решение уравнения (3.3.1), то вектор  $c$  является решением системы (3.3.1). Обратно, если  $c$  – решение системы (3.3.2), то функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(t) + f(t) \quad (3.3.3)$$

будет решением уравнения (3.3.1) (проверьте это!).

Перепишем (3.3.2) в виде  $c = Ac + b$  или  $(I_m - A)c = b$ . Если однородное уравнение Фредгольма имеет только нулевое решение, то и однородная система  $(I_m - A)c = \theta$  также имеет только нулевое решение, т.е. матрица  $I_m - A$  невырожденная. Поэтому система (3.3.2) однозначно разрешима при любом свободном члене, и можно построить решение интегрального уравнения по формуле (3.3.3).

Пример.

$$x(t) = \int_0^1 \left( \exp(-t) \exp(\tau) + \exp(-2t) \exp(2\tau) \right) x(\tau) d\tau + 1.$$

Здесь  $\varphi_k(t) = \exp(-kt)$ ,  $\psi_k(t) = \exp(kt)$ ;  $k = 1, 2$ . Вычислив интегралы (скалярные произведения), запишем систему уравнений (3.3.2):

$$\begin{cases} 0 \cdot c_1 & + & (1/e - 1) \cdot c_2 & = & e - 1 \\ (1 - e) \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & = & \frac{e^2 - 1}{2} \end{cases}.$$

Отсюда  $c_1 = -\frac{e+1}{2}$ ,  $c_2 = -e$ , т.е.

$$x(t) = 1 - \frac{e+1}{2} \exp(-t) - e \cdot \exp(-2t).$$

### 3.4. Интегральное уравнение Вольтерра

Если  $K(t, \tau) = 0$  при  $\tau > t$ , то уравнение (3.2.1) принимает вид

$$x(t) = \int_{\alpha}^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau + f(t). \quad (3.4.1)$$

Это уравнение называют уравнением Вольтерра<sup>3</sup>.

Замечание. Задачу Коши для линейного дифференциального уравнения

$$x' = a(t) \cdot x + g(t), \quad x(t_0) = x_0$$

можно свести к уравнению Вольтерра. Действительно, проинтегрировав тождество  $x'(\tau) \equiv a(\tau)x(\tau) + g(\tau)$  по промежутку  $[t_0, t]$ , получим

$$x(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) x(\tau) d\tau + \left( x_0 + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right),$$

которое, очевидно, является частным случаем уравнения (3.4.1).

<sup>3</sup>Вито ВОЛЬТЕРРА (1860-1940) – итальянский математик, член национальной академии деи Линчеи в Риме. Наиболее известны его работы в области дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа, теории упругости.

Покажем, что однородное уравнение Вольтерра

$$z(t) = \int_{\alpha}^t K(t, \tau) z(\tau) d\tau$$

имеет только нулевое решение. Обозначим  $M = \max_{\alpha \leq \tau \leq t \leq \beta} (|K(t, \tau)|)$  и оценим функцию  $z$  – решение этого уравнения.

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{\alpha}^t K(t, \tau) z(\tau) d\tau \implies \\ \implies |z(t)| &\leq \int_{\alpha}^t |K(t, \tau)| \cdot |z(\tau)| d\tau \leq \int_{\alpha}^t M \cdot \|z\|_C d\tau = M \cdot \|z\|_C \cdot (t - \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \int_{\alpha}^t |K(t, \tau)| \cdot |z(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^t M \cdot M \cdot \|z\|_C \cdot (\tau - \alpha) d\tau = M^2 \cdot \|z\|_C \cdot \frac{(t - \alpha)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Действуя аналогично, получим, что для любого натурального  $k$

$$|z(t)| \leq M^k \cdot \|z\|_C \cdot \frac{(t - \alpha)^k}{k!}.$$

При достаточно большом  $k$   $M^k \cdot \frac{(\beta - \alpha)^k}{k!} < \frac{1}{2}$ . Поэтому имеем  $|z(t)| \leq \frac{1}{2} \cdot \|z\|_C$  при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ , откуда  $\|z\|_C \leq \frac{1}{2} \cdot \|z\|_C$ , т.е.  $z(t) \equiv 0$ .

По теореме Фредгольма отсюда следует, что уравнение Вольтерра всегда имеет единственное решение.

Решение уравнения Вольтерра также очень редко удается получить в явной ("замкнутой") форме. В следующем пункте рассматривается важный частный случай – уравнение Вольтерра с разностным ядром, для решения которого можно применить преобразование Лапласа.

### 3.5. Уравнение Вольтерра с разностным ядром

*Разностным* называют ядро вида  $K(t, \tau) = g(t - \tau)$ . Не умаляя общности, можно считать  $\alpha = 0$ . Тогда уравнение Вольтерра примет вид

$$x(t) = \int_0^t g(t - \tau) x(\tau) d\tau + f(t), \quad 0 \leq t \leq \beta. \quad (3.5.1)$$

Если доопределить функции  $g$  и  $f$ , положив их равными нулю при  $x < 0$  и при  $x > \beta$ , то они, очевидно, окажутся оригиналами. Будем искать решение также среди функций-оригиналов. Тогда уравнение (3.5.1) перепишется в виде

$$x = g \otimes x + f \quad (\otimes - \text{знак свертки функций}).$$

Преобразуя это уравнение по Лапласу, получим  $\tilde{x} = \tilde{g} \cdot \tilde{x} + \tilde{f}$ , откуда

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{f}}{1 - \tilde{g}}. \quad (3.5.2)$$

**Замечания.** 1. Этот метод применим и в случае, когда  $\beta = +\infty$ , если, конечно, функции  $g$  и  $f$  экспоненциально ограничены.

2. Не следует забывать, что на самом деле мы не решили уравнение, а просто "передали работу в другой цех": требуется найти изображения функций  $g$  и  $f$  и, если это удастся сделать, восстановить оригинал для найденного изображения решения (3.5.2)!

Пример.

$$x(t) = \int_0^t \exp(-(t-\tau))x(\tau) d\tau + 1; \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Здесь

$$g(t) = \exp(-t) \cdot \delta_1(t) \implies \tilde{g}(s) = \frac{1}{s+1};$$

$$f(t) = \delta_1(t) \implies \tilde{f}(s) = \frac{1}{s}.$$

Преобразуя уравнение по Лапласу, найдем

$$\tilde{x}(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \implies x(t) = (1+t) \cdot \delta_1(t).$$

### 3.6. Численное решение линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра

Ранее подчеркивалось, что решение интегрального уравнения очень редко удастся получить в явной ("замкнутой") форме. В этом пункте мы рассмотрим простейший численный метод решения.

Зададим натуральное число  $N$  и построим на сегменте  $[\alpha, \beta]$  равномерную сетку  $t_k = \alpha + k \cdot h$ ;  $k = 0, \dots, N$ ;  $h = \frac{\beta - \alpha}{N}$ . Численное решение будем искать в виде сплайна первого порядка (кусочно постоянной функции)

$$S_h(t) = s_k \quad \text{при} \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (3.6.1)$$

Заменяя в уравнении (3.2.1) интеграл квадратурной формулой левых прямоугольников, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$s_k = h \sum_{m=0}^{N-1} K(t_k, t_m) s_m + f(t_k); \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (3.6.2)$$

Приведем без доказательства теорему, обосновывающую применение этого численного метода.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1. ядро уравнения (3.2.1) имеет непрерывные частные производные по обоим аргументам в каждом из треугольников, отмеченных на рис.3.2;
2. функция  $f$  имеет кусочно непрерывную производную на  $[\alpha, \beta]$ ;
3. соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение.

Тогда существует такое положительное число  $h_0$ , что при всех  $h < h_0$  система линейных уравнений (3.6.2) имеет единственное решение  $s = [s_0, \dots, s_{N-1}]^T$ .

Далее, существует такое положительное число  $C$ , что при  $h < h_0$

$$|x(t_k) - s_k| \leq C \cdot h, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

где  $x$  – решение уравнения (3.2.1).

Более того, для всех  $t \in [\alpha, \beta]$  выполнена оценка  $|x(t) - S_h(t)| \leq C \cdot h$ , где  $S_h$  – сплайн, определяемый формулой (3.6.1).