

5. МНОГОМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

5.1. Одна содержательная задача

Рассмотрим *стационарный* тепловой режим в *толстом* проводнике постоянного поперечного сечения, *бесконечно* вдоль оси Oz . Допустим, что тепло выделяется током равномерно по длине проводника. Тогда передачи тепла вдоль оси Oz не будет, и температура будет зависеть от *двух* пространственных координат. Выделим слой проводника толщины Δz , заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными оси Oz , и рассмотрим прямоугольный элемент этого слоя с центром в точке (x, y) , а также четыре "соседних" с ним элемента (рис.5.1). Будем считать, что температура постоянна в пределах каждого из элементов.

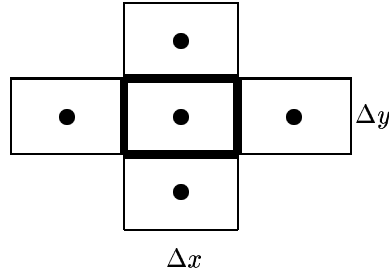


Рис. 1:

Приращение количества тепла в выделенном на рис.5.1 элементе проводника за время Δt есть сумма *пяти* слагаемых:

1. Тепло, выделенное током, которое при постоянном токе пропорционально времени и объему элемента:

$$\Delta Q_1 = \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z.$$

2. Тепло, поступившее из *правого* соседнего элемента, которое пропорционально времени, площади границы между элементами, разности температур в центрах элементов и обратно пропорционально расстоянию между этими центрами (λ – коэффициент теплопроводности материала проводника):

$$\Delta Q_2 = \lambda \cdot \Delta t \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{T(x + \Delta x, y) - T(x, y)}{\Delta x}.$$

3. Тепло, поступившее из *левого* соседнего элемента:

$$\Delta Q_3 = \lambda \cdot \Delta t \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{T(x - \Delta x, y) - T(x, y)}{\Delta x}.$$

4. Тепло, поступившее из *верхнего* соседнего элемента:

$$\Delta Q_4 = \lambda \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \frac{T(x, y + \Delta y) - T(x, y)}{\Delta y}.$$

5. Тепло, поступившее из *нижнего* соседнего элемента:

$$\Delta Q_5 = \lambda \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \frac{T(x, y - \Delta y) - T(x, y)}{\Delta y}.$$

Запишем уравнение теплового баланса для *стационарного* режима:

$$\sum_{j=0}^5 \Delta Q_j = 0.$$

Мы не будем выписывать получающиеся громоздкие выражения. Отметим лишь, что, аналогично задаче из п.4.1, сокращая эти уравнения на $\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$ и переходя к пределу ($\Delta x = \Delta y = 0$), получим (в предположении достаточной гладкости функции T) дифференциальное уравнение в *частных производных*

$$D_x (\lambda \cdot D_x T) + D_y (\lambda \cdot D_y T) + \gamma = 0. \quad (5.1.1)$$

Добавляя к уравнению (5.1.1) граничное условие (задавая на границе проводника либо температуру, либо тепловой поток, либо, наконец, их линейную комбинацию), получим краевую задачу для этого уравнения.

5.2. Основные определения

Уравнение (5.1.1) представляет собой двухмерный вариант уравнения

$$Lu \equiv -\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) = f, \quad (5.2.1)$$

возникающего при описании многих физических задач (напомним, что это уравнение уже встречалось в п.1.7).

Мы будем рассматривать уравнение (5.2.1) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей (в приложениях обычно $n = 2$ или $n = 3$).

В (5.2.1) λ – заданная функция в Ω , непрерывно дифференцируемая вплоть до границы и удовлетворяющая неравенству

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0, \quad x \in \Omega;$$

f – кусочно непрерывная в Ω функция.

Замечание. Если $\lambda = \text{const}$, уравнение (5.2.1) принимает вид

$$-\Delta u = \frac{f}{\lambda}$$

и, как уже указывалось, именуется уравнением Пуассона. Однородное уравнение Пуассона называется уравнением Лапласа.

На границе области Ω , аналогично краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, обычно задается краевое условие одного из трех типов:

1) первого рода (условие Дирихле)

$$u|_{\partial\Omega} = \phi_1$$

(фиксируются значения искомой функции на границе области);

2) второго рода (условие Неймана¹)

$$\lambda \cdot D_{\mathbf{n}} u|_{\partial\Omega} = \phi_2$$

(фиксируются значения нормальной производной искомой функции на границе области);

3) или третьего рода

$$(\lambda \cdot D_{\mathbf{n}} u + \alpha \cdot u)|_{\partial\Omega} = \phi_3$$

(физический смысл всех этих условий для задачи о тепловом режиме описан в п.4.2). Возможна также ситуация, когда на части границы Ω задается, к примеру, условие первого рода, а на остальной части $\partial\Omega$ – условие третьего рода, и т.п.

Замечание. Аналогично п.4.2, можно с помощью замены неизвестной функции добиться, чтобы краевые условия были *однородными*.

5.3. Метод Фурье решения краевой задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ – область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим \mathcal{D}_L *линейное пространство* всех заданных на Ω функций, имеющих кусочно непрерывные вторые частные производные и удовлетворяющих на $\partial\Omega$ заданным *однородным* краевым условиям. Тогда краевая задача для уравнения (5.2.1) может быть записана в виде

$$Lu = f, \quad u \in \mathcal{D}_L. \quad (5.3.1)$$

Решение задачи (5.3.1) методом Фурье, так же, как в одномерном случае (п.4.4), возможно, если известны все собственные числа и соответствующие им собственные функции оператора L – нетривиальные решения краевой задачи

$$L\varphi = \nu \cdot \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_L. \quad (5.3.2)$$

Можно показать, что при достаточно общих условиях существуют собственные функции задачи (5.3.2), образующие замкнутую ортогональную систему в пространстве кусочно непрерывных на Ω функций со скалярным произведением

¹Карл Готфрид НЕЙМАН (1832-1925) – немецкий физик и математик.

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi \cdot \overline{\psi}.$$

Однако случаи, когда собственные функции можно выписать "в явном виде", очень редки. Приведем два примера. В обоих $\lambda \equiv 1$, т.е. уравнение для собственных функций имеет вид

$$-\Delta \varphi = \nu \cdot \varphi. \quad (5.3.3)$$

Примеры. 1. $\Omega =]0, a_1[\times]0, a_2[\times]0, a_3[\subset \mathbb{R}^3$ – прямоугольный параллелепипед. Если на $\partial\Omega$ задано условие Дирихле, то собственные функции имеют вид

$$\varphi_{jkm} = \sin\left(\frac{j\pi x_1}{a_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_2}{a_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x_3}{a_3}\right), \quad j, k, m \in \mathbb{N}.$$

Проверьте, что φ_{jkm} – действительно собственная функция задачи (5.3.2), соответствующая собственному числу

$$\nu_{jkm} = \pi^2 \cdot \left(\frac{j^2}{a_1^2} + \frac{k^2}{a_2^2} + \frac{m^2}{a_3^2} \right). \quad (5.3.4)$$

Аналогично, в случае краевого условия Неймана собственные функции имеют вид

$$\varphi_{jkm} = \cos\left(\frac{j\pi x_1}{a_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x_2}{a_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x_3}{a_3}\right), \quad j, k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

а собственные числа также задаются формулой (5.3.4).

2. $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ – круг.

Можно показать, что в естественной для этой задачи полярной системе координат (ρ, ϑ) уравнение (5.3.3) записывается так:

$$-D_\rho(\rho \cdot D_\rho \varphi) - \frac{1}{\rho} \cdot D_{\vartheta\vartheta}^2 \varphi = \nu \cdot \rho \cdot \varphi.$$

Собственные функции задачи с условием Дирихле $\varphi|_{\rho=R} = 0$ имеют вид

$$\varphi_{km} = J_{|k|}\left(\mu_m^{(k)} \frac{\rho}{R}\right) \cdot \exp(ik\vartheta), \quad k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}.$$

Здесь $J_{|k|}$ – функция Бесселя (цилиндрическая функция) первого рода порядка $|k|$, $\mu_m^{(k)}$ – ее m -й положительный корень². Функция φ_{km} соответствует собственному числу $\nu_{km} = \left(\mu_m^{(k)}/R\right)^2$.

Дословно повторяя выкладки п.4.4, можно показать, что если известны собственные числа и собственные функции задачи (5.3.2), то решение задачи (5.3.1) имеет вид (все формулы даны для $n = 3$)

$$u = \sum_{j,k,m} \frac{f_{jkm}}{\nu_{jkm}} \cdot \varphi_{jkm}, \quad (5.3.5)$$

где

$$f_{jkm} = \frac{\langle f, \varphi_{jkm} \rangle}{\|\varphi_{jkm}\|^2} = \frac{\int_{\Omega} f \cdot \overline{\varphi_{jkm}}}{\int_{\Omega} |\varphi_{jkm}|^2}.$$

Суммирование в (5.3.5) ведется по всем значениям индексов.

Аналогично одномерному случаю, частная сумма ряда (5.3.5) дает наилучшее среднеквадратическое приближение для решения краевой задачи (5.3.1) среди всех линейных комбинаций фиксированного набора функций φ_{jkm} .

²Как уже указывалось в предыдущей главе, существуют программы вычисления этих корней; см., например, статью A.Nowak, R.Bialecki, K.Kurpisz: Int. Journ. for Numer. Meth. in Engin., V.24 (1987), 419-445.

Замечание. Вновь напомним, что собственные функции задачи (5.3.2) можно выписать лишь в исключительных случаях. Более того, даже в этих случаях для практических вычислений часто проще использовать метод, рассмотренный в следующем пункте.

5.4. Метод конечных элементов

В этом пункте мы кратко рассмотрим конструкцию проекционного метода решения краевой задачи для уравнения (5.2.1). Мы ограничимся случаем, когда на всей границе области Ω задано однородное условие Дирихле. Умножив скалярно уравнение (5.2.1) на произвольную *вещественную* кусочно гладкую, непрерывную функцию ϕ , равную нулю на $\partial\Omega$, получим равенство

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) \cdot \phi = \int_{\Omega} f \cdot \phi. \quad (5.4.1)$$

Преобразуем (5.4.1), применяя интегрирование по частям (п.1.5):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) \cdot \phi &= - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} D_k(\lambda \cdot D_k u) \cdot \phi = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \lambda \cdot D_k u \cdot D_k \phi = \\ &= \int_{\Omega} \lambda \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \phi. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Аналогично п.4.5, будем искать приближенное решение краевой задачи в виде линейной комбинации конечного набора линейно независимых функций $\{\phi_k\}$, $k = 1, \dots, N$, равных нулю на $\partial\Omega$. Коэффициенты этой линейной комбинации находят из системы линейных уравнений, которая получается подстановкой в (5.4.2) $\phi = \phi_m$, $m = 1, \dots, N$. Элементы матрицы коэффициентов этой системы задаются формулой

$$a_{mk} = \int_{\Omega} \lambda \langle \nabla \phi_m, \nabla \phi_k \rangle, \quad m, k = 1, \dots, N, \quad (5.4.3)$$

а свободные члены – формулой

$$b_m = \int_{\Omega} f \cdot \phi_m, \quad m = 1, \dots, N. \quad (5.4.4)$$

Как и в одномерном случае, можно показать, что матрица коэффициентов A – положительно определенная (и потому система разрешима при любом N).

Базисные функции естественно выбирать так, чтобы большинство элементов этой матрицы равнялись нулю. Для этого обычно область Ω разбивают на части простой формы (их называют "конечными элементами"), а в качестве базисных функций используют сплайны, каждая порция которых отлична от нуля только на одном из "конечных элементов". Такая разновидность проекционного метода называется *методом конечных элементов*.

Терминологическое замечание. В литературе конечными элементами называют не только части, на которые разбивается область ("треугольные элементы", "прямоугольные элементы" и т.п.), но и порции сплайнов, применяемые в методе ("линейные элементы", "квадратичные элементы" и т.п.).

Замечание. Идея метода конечных элементов была впервые предложена Р.Курантом³.

В простейшем случае, когда Ω – прямоугольник $]0, a[\times]0, b[$, естественно строить базисные функции в виде попарных произведений одномерных "палаток" (п.4.5)

$$\Pi_{ij}(x, y) = \Pi_i(x) \cdot \Pi_j(y)$$

(перед подстановкой в (5.4.2) Π_{ij} следует перенумеровать для превращения двухмерного массива в одномерный).

Такая функция отлична от нуля только на прямоугольнике $]x_{i-1}, x_{i+1}[\times]y_{j-1}, y_{j+1}[$ (рис.5.2). Поэтому при фиксированных i и j отличны от нуля будут только *девять* интегралов

$$\int_{\Omega} \lambda \langle \nabla \Pi_{ij}, \nabla \Pi_{\kappa\mu} \rangle; \quad \kappa = i-1, i, i+1; \mu = j-1, j, j+1,$$

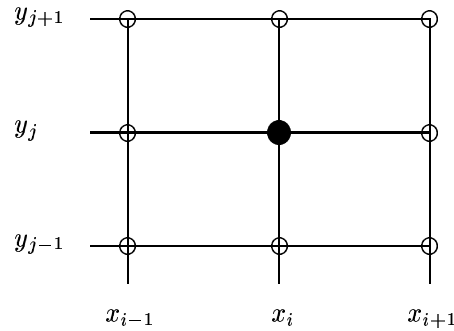


Рис. 2:

для которых пересекаются соответствующие прямоугольники. Следовательно, каждая строка матрицы A будет иметь не более девяти ненулевых элементов.

Несколько более экономичной, а также применимой к случаю плоской области Ω достаточно общего вида оказывается вычислительная схема, в которой конечные элементы – треугольники⁴ (такое разбиение называется *триангуляцией*), а каждая базисная функция ("двухмерная палатка") \tilde{P}_{ij} – непрерывный сплайн второго порядка из шести порций, отличный от нуля только на фигуре, изображенной на рис.5.3. При этом значение "палатки" в центральном узле равно единице, в остальных – нулю, а ее график на каждом из составляющих фигуру треугольников представляет собой кусок плоскости. Таким образом, как и в одномерном случае, линейные комбинации палаток – всевозможные непрерывные сплайны второго порядка (только теперь уже от двух переменных), порождаемые данной триангуляцией.

В этой (наиболее часто применяемой) схеме отличными от нуля оказываются уже не более *семи* элементов строки матрицы коэффициентов системы (5.4.3).

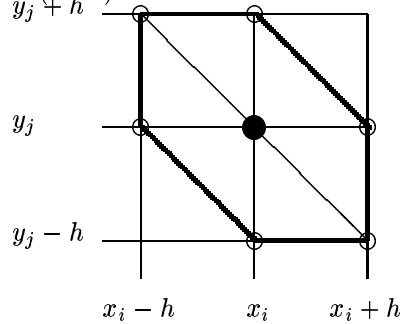


Рис. 3:

Сочетание положительной определенности и разреженности матриц позволило создать быстрые и эффективные алгоритмы решения систем. Отметим, что, как и в п.4.5, компоненты вектора-решения системы дают значения приближенного решения краевой задачи в соответствующих узлах.

Можно показать, что справедлива

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей; λ – непрерывно дифференцируемая в Ω вплоть до границы функция, f кусочно непрерывна на Ω . Если u – точное решение задачи Дирихле для уравнения (5.2.1), а

$$\hat{u}(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} \cdot \tilde{P}_{ij}(x, y)$$

– приближенное решение, то при всех i, j

$$|\hat{u}(x_i, y_j) - u(x_i, y_j)| \leq C \cdot h,$$

где h – шаг сетки (см. рис.5.3), C – некоторая положительная константа.

Замечания. 1. Для приближенного вычисления интегралов в формулах (5.4.3) – (5.4.4) обычно применяются квадратурные формулы, получающиеся аппроксимацией функций λ и f непрерывными сплайнами второго порядка на сетке (см. замечание 1 в конце п.4.5). Остается в силе также замечание 2 из п.4.5.

³Рихард КУРАНТ (1888-1972) – немецкий математик, иностранный член АН СССР. С 1933 года работал в США. Его именем назван Институт математических наук в Нью-Йоркском университете. На русский язык переведены многие его книги, в т.ч. двухтомный труд "Методы математической физики".

⁴Естественно, границу Ω для этого следует аппроксимировать многоугольником.

2. Обратите внимание, что, как и в одномерном случае, ни одно приближенное решение не имеет вторых производных. Но это и не нужно (см. замечание 3 из п.4.5)!

3. Идеи, изложенные в этом пункте, могут быть реализованы и в случае $n > 2$. Формулы (5.4.3) и (5.4.4), естественно, остаются без изменений, но построение триангуляции области и вычисление коэффициентов системы технически более сложно.