

1. РАЗНОСТНЫЕ И ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЗАДАЧА КОШИ

1. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Две содержательные задачи, приводящие к разностным уравнениям

Задача 1. Конденсатор емкости C с начальным напряжением на нем U заряжается через сопротивление R от источника постоянной электродвижущей силы E ($E > U$) (рис.1.1). Требуется найти закон изменения напряжения на конденсаторе во времени $u = \varphi(t)$.

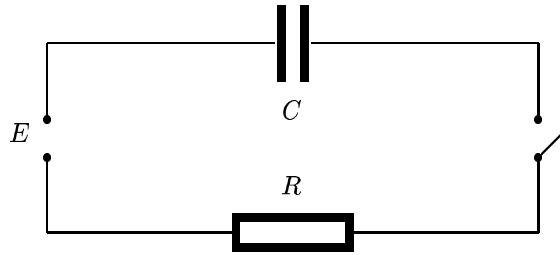


Рис. 1: К задаче 1

Будем считать, что ключ замыкается в момент времени $t = 0$, а напряжение на конденсаторе доступно для наблюдения (измерения) *только в узлах временной сетки*

$$t_k = k \cdot \Delta t; \quad k = 0, 1, \dots,$$

где Δt – заданное положительное число (шаг сетки). Будем обозначать $u_k = \varphi(t_k)$.

Ток в момент t_k равен, как известно,

$$i_k = \frac{E - u_k}{R}. \quad (1.1.1)$$

Известно также, что приращение заряда конденсатора q на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ равно

$$q_{k+1} - q_k = C \cdot (u_{k+1} - u_k) = \tilde{i}_k \cdot \Delta t,$$

где \tilde{i}_k – ток в некоторый момент времени из интервала $]t_k, t_{k+1}[$.

Если положить в (1.1.1) $\tilde{i}_k = i_k$, то получим

$$i_k = C \cdot \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = \frac{E - u_k}{R}$$

или

$$u_{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot u_k + \frac{\Delta t}{\tau} E \quad (1.1.2)$$

(здесь $\tau = RC$).

Если же положить в (1.1.1) $\tilde{i}_k = i_{k+1}$, то получим

$$i_{k+1} = C \cdot \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = \frac{E - u_{k+1}}{R}$$

или

$$u_{k+1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} \cdot u_k + \frac{\frac{\Delta t}{\tau}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} E. \quad (1.1.3)$$

При известном начальном напряжении на конденсаторе $u_0 = U$ каждое из полученных уравнений позволяет определить последовательность значений напряжения на конденсаторе в любом узле временной сетки.

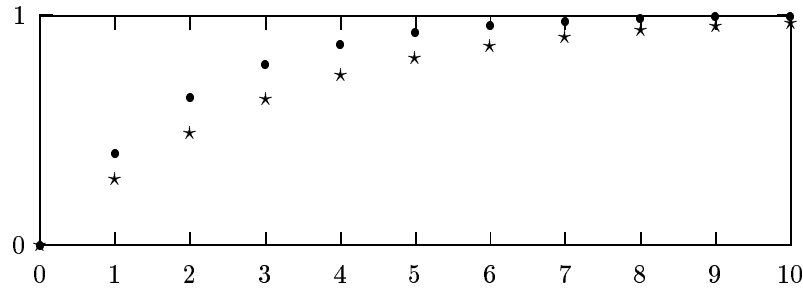


Рис. 2:

На рис.1.2 представлены графики решений уравнений (1.1.2) (точки) и (1.1.3) (звездочки) при $E = 1$, $U = 0$, $\frac{\Delta t}{\tau} = 0.4$. Заметим, что эти уравнения получены при *различных допущениях*, и их решения различны. Можно ожидать, что при уменьшении шага сетки (Δt) различие будет уменьшаться.

Задача 2. Тело массы m может скользить по вертикальному стержню (рис.1.3). Оно закреплено в таком положении, что в пружине, соединяющей его с "потолком", отсутствует напряжение. В момент времени $t = 0$ тело освобождается и под действием силы тяжести начинает двигаться. Требуется найти закон изменения координаты центра масс этого тела во времени $x(t)$.

Будем считать, что координата центра масс измеряется *только в узлах временной сетки*

$$t_k = k \cdot \Delta t; \quad k = 0, 1, \dots,$$

где Δt – заданное положительное число (шаг сетки). Будем обозначать $x_k = x(t_k)$.

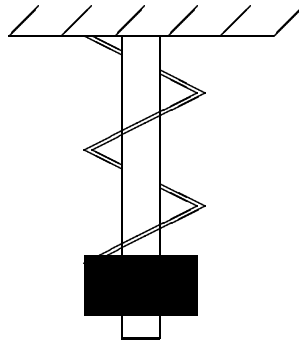


Рис. 3: К задаче 2

Согласно второму закону Ньютона, произведение массы тела на его ускорение w равно сумме сил, действующих на тело, к которым относятся:

1) сила тяжести

$$f = m \cdot g \quad (g - \text{ускорение земного тяготения});$$

2) сила трения, которую мы *будем считать* пропорциональной скорости v (что допустимо в некоторых условиях)

$$f = -a \cdot v$$

(знак минус показывает, что направления силы трения и скорости противоположны);

3) упругая сила пружины, которую мы *будем считать* (по закону Гука) пропорциональной координате

$$f = -b \cdot x$$

(эта сила направлена противоположно смещению тела).

Запишем второй закон Ньютона в k -м узле временной сетки

$$m \cdot w_k = m \cdot g - a \cdot v_k - b \cdot x_k. \quad (1.1.4)$$

Заметим, что

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \tilde{v}_k, \quad (1.1.5)$$

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} = \tilde{w}_k, \quad (1.1.6)$$

где \tilde{v}_k и \tilde{w}_k – значения скорости и ускорения в некоторых точках интервала $]t_k, t_{k+1}[$.

Заменим (сознательно идя на внесение погрешности) в (1.1.4) w_k на \tilde{w}_k , а в (1.1.5) \tilde{v}_k на v_k (другие варианты замен в этой задаче мы рассматривать не будем, предоставив читателю сделать это в виде упражнения).

После несложных преобразований получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot v_k \\ v_{k+1} = -\frac{b\Delta t}{m} \cdot x_k - \left(\frac{a\Delta t}{m} - 1\right) \cdot v_k + \Delta t \cdot g. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Будем считать, что движение тела начинается без начальной скорости. Тогда система (1.1.7) позволяет при известных $x_0 = 0$ и $v_0 = 0$ найти значения последовательностей $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ и $(v_k)_{k=0}^{+\infty}$ в любом узле временной сетки.

Можно поступить и иначе. Выразим из первого уравнения (1.1.7) v_k через x_{k+1} и x_k (и, следовательно, v_{k+1} через x_{k+2} и x_{k+1}) и подставим эти выражения во второе уравнение. После преобразований (проделайте их!) получим

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= \left(2 - \frac{a \cdot \Delta t}{m}\right) \cdot x_{k+1} + \\ &+ \left(\frac{a \cdot \Delta t}{m} - \frac{b \cdot (\Delta t)^2}{m} - 1\right) \cdot x_k + (\Delta t)^2 \cdot g. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

По-прежнему $x_0 = 0$. Далее, условие $v_0 = 0$ дает $x_1 = 0$.

Очевидно, уравнение (1.1.8) позволяет при известных $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$ найти значение последовательности $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ в любом узле временной сетки.

Замечания. 1. Построенные нами уравнения принято называть *дискретными математическими моделями* рассмотренных содержательных задач.

2. Мы рекомендуем не забывать, что при построении математической модели неизбежны разного рода допущения. Поэтому *одна и та же* содержательная задача может привести к *существенно различным* математическим моделям. Процесс построения математической модели неалгоритмируем. Постановщик задачи должен стремиться, с одной стороны, сохранить в модели основные характеристики содержательной задачи, а с другой – построить не слишком сложную математическую модель, т.е. модель, которая допускает анализ с помощью *современной* математики. Нетрудно понять, что примирение этих противоречивых требований часто требует незаурядного искусства.

1.2. Основные определения

Оба уравнения, полученные при формализации задачи 1 предыдущего пункта, являются частными случаями уравнения

$$x_{k+1} = a \cdot x_k + f_k, \quad (1.2.1)$$

которое называется *линейным разностным уравнением первого порядка с постоянным коэффициентом*.

Здесь a – заданное число (*коэффициент уравнения*), а $(f_k)_{k=0}^{+\infty}$ – заданная последовательность (*свободный член уравнения*).

Когда-то уравнения вида (1.2.1) записывали иначе, вынося в левую часть не x_{k+1} , а $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – так называемые *первые разности* искомой последовательности. Поэтому уравнение называется *разностным*.

Это уравнение называется уравнением *первого порядка*, так очередное значение искомой последовательности выражается через *одно предыдущее*.

Это уравнение называется *линейным*, ибо оно может быть записано в виде

$$\mathcal{L}x = f,$$

где \mathcal{L} – линейный оператор, ставящий в соответствие последовательности (x_k) новую последовательность по правилу $(\mathcal{L}x)_k = x_{k+1} - a \cdot x_k$ (вспомните определение *линейного оператора*).

И, наконец, это уравнение называют уравнением с *постоянным* коэффициентом, ибо коэффициент a не зависит от k .

Система уравнений (1.1.7), полученная при формализации задачи 2 из предыдущего пункта, является частным случаем системы двух линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = a_{11}x_{1,k} + a_{12}x_{2,k} + f_{1,k} \\ x_{2,k+1} = a_{21}x_{1,k} + a_{22}x_{2,k} + f_{2,k}. \end{cases}$$

Здесь $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – заданные числа (коэффициенты системы), а $(f_{1,k})$ и $(f_{2,k})$ – заданные последовательности (свободные члены системы).

Несложно написать систему из трех, четырех и т.д. уравнений. Однако целесообразнее сразу перейти к матричной форме записи

$$x_{k+1} = A \cdot x_k + f_k. \quad (1.2.2)$$

Здесь A – квадратная числовая матрица порядка n , $(f_k)_{k=0}^{+\infty}$ – заданная последовательность числовых векторов.

Сформулируем теперь *задачу Коши* для уравнения (1.2.2):

Построить последовательность числовых векторов $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$, удовлетворяющую уравнению (1.2.2) при заданном начальном векторе x_0 .

Замечания. 1. Казалось бы, формула (1.2.2) дает возможность вычислять решение задачи Коши: по заданному начальному вектору x_0 находится $x_1 = A \cdot x_0 + f_0$, затем $x_2 = A \cdot x_1 + f_1$ и т.д. Однако далее мы покажем, что этот простой алгоритм может оказаться *численно неустойчивым*. В то же время из (1.2.2) следует, что решение задачи Коши существует и единственно.

2. Нетрудно записать общий вид линейных разностных уравнений с *переменными* коэффициентами:

$$x_{k+1} = A_k \cdot x_k + f_k.$$

Здесь $(A_k)_{k=0}^{+\infty}$ – заданная последовательность числовых матриц.

Можно также рассмотреть *нелинейные* разностные уравнения

$$x_{k+n} = \varphi(x_k, \dots, x_{k+n-1}),$$

где φ – некоторый функционал на \mathbb{R}^n .

Однако для таких уравнений нет общих методов решения, кроме численных; численные же методы, как уже указывалось, могут оказаться неустойчивыми. Поэтому мы ограничимся изучением *линейных* разностных уравнений с *постоянными* коэффициентами

В задаче 2 п.1.1 была рассмотрена еще одна математическая модель. Она может быть обобщена так:

$$x_{k+2} = a_1 \cdot x_{k+1} + a_0 \cdot x_k + f_k. \quad (1.2.3)$$

Естественно назвать это уравнение линейным разностным уравнением *второго порядка* с постоянными коэффициентами (a_0 и a_1).

Вообще линейным разностным уравнением *порядка n* с постоянными коэффициентами называют уравнение

$$x_{k+n} = a_{n-1} \cdot x_{k+n-1} + \dots + a_0 \cdot x_k + f_k. \quad (1.2.4)$$

Задача Коши для него формулируется так:

Найти числовую последовательность $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$, удовлетворяющую уравнению (1.2.4) при заданных x_0, \dots, x_{n-1} (начальных условиях).

Замечание. Всякое линейное разностное уравнение порядка m может быть преобразовано в эквивалентную систему из m линейных уравнений первого порядка.

Действительно, пусть дано уравнение второго порядка

$$x_{k+2} = a_1 \cdot x_{k+1} + a_0 \cdot x_k + f_k.$$

Введем новую последовательность $y_k = x_{k+1} - x_k$. Тогда

$$x_{k+2} = x_{k+1} + y_{k+1} = x_k + y_k + y_{k+1} = a_1 \cdot (x_k + y_k) + a_0 \cdot x_k + f_k.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x_{k+1} &= & x_k &+ & y_k \\ y_{k+1} &= & (a_1 + a_0 - 1) \cdot x_k &+ & (a_1 - 1) \cdot y_k &+ & f_k. \end{cases}$$

Очевидно, что такую операцию можно проделать с разностным уравнением любого порядка.

1.3. Производящая функция числовой последовательности

В этом пункте будет рассмотрен математический аппарат, позволяющий решать задачи Коши для линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Определение. Пусть задана числовая последовательность (a_k) . Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ сходится не только в нуле, то его сумму $\mathcal{A}(z)$ называют *производящей функцией последовательности* (a_k) .

Примеры 1. Пусть $a_k = 0$ при $k > N$. Тогда $\mathcal{A}(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k$ – полином.

2. Пусть $a_k = \alpha^k$. Тогда $\mathcal{A}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k z^k = \frac{1}{1-\alpha z}$. Радиус сходимости этого ряда равен $\frac{1}{|\alpha|}$.

Условимся обозначать буквой \mathcal{L} оператор, который ставит в соответствие последовательности ее производящую функцию. Тогда результат, полученный в примере 2, примет вид

$$\mathcal{L}(\alpha^k) = \frac{1}{1-\alpha z}; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1-\alpha z}\right) = (\alpha^k).$$

3. Дифференцируя тождество $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k z^k = \frac{1}{1-\alpha z}$ и сокращая на α , получим

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \alpha^k z^k = \frac{1}{(1-\alpha z)^2}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}((k+1)\alpha^k) = \frac{1}{(1-\alpha z)^2}; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(1-\alpha z)^2}\right) = ((k+1)\alpha^k).$$

4. Повторно дифференцируя, получим ($m \geq 1$)

$$\mathcal{L}\left(\frac{(k+1)\dots(k+m-1)}{(m-1)!} \alpha^k\right) = \frac{1}{(1-\alpha z)^m}; \quad (1.3.1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(1-\alpha z)^m}\right) = \left(\frac{(k+1)\dots(k+m-1)}{(m-1)!} \alpha^k\right). \quad (1.3.2)$$

Рассмотрим некоторые свойства производящих функций.

1. Если $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$\mathcal{L}(c_k) = \alpha \mathcal{L}(a_k) + \beta \mathcal{L}(b_k).$$

Это очевидно следует из свойств степенных рядов.

2. Пусть $\mathcal{L}(a_k) = \mathcal{A}(z)$, т.е. $\mathcal{A}(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$.

Тогда

$$z^m \cdot \mathcal{A}(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + \dots + a_n z^{n+m} + \dots,$$

т.е.

$$\mathcal{L}^{-1}(z^m \cdot \mathcal{A}(z)) = (b_k),$$

где $b_0 = \dots = b_{m-1} = 0$; $b_k = a_{k-m}$ при $k \geq m$.

Умножение производящей функции на z^m ($m \in \mathbb{N}$) вызывает "запаздывание" последовательности на m шагов.

3. Перемножая степенные ряды

$$\mathcal{A}(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots,$$

$$\mathcal{B}(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$$

и замечая, что коэффициент при z^n в произведении равен

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

получим

$$\mathcal{L}^{-1}(A(z) \cdot B(z)) = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

Определение. Последовательность $\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$ называют *сверткой* последовательностей (a_k) и (b_k) и обозначают $(a * b)_n$.

Производящая функция свертки двух последовательностей равна произведению производящих функций этих последовательностей.

Производящая функция последовательности векторов определяется как вектор, компоненты которого – производящие функции последовательностей-компонент. Для векторных производящих функций справедливы все перечисленные свойства.

1.4. Решение задачи Коши для уравнений первого порядка

Задача Коши (в матричной форме) имеет вид

$$x_{k+1} = A \cdot x_k + f_k; \quad x_0 - \text{заданный начальный вектор.}$$

Умножим уравнение на z^{k+1} и просуммируем по k . Если обозначить $\mathcal{X}(z) = \mathcal{L}(x_k)$, $\mathcal{F}(z) = \mathcal{L}(f_k)$, то получим

$$\mathcal{X}(z) - x_0 = z \cdot (A \cdot \mathcal{X}(z) + \mathcal{F}(z)).$$

Отсюда

$$\mathcal{X}(z) = (I - zA)^{-1} \cdot (x_0 + z \cdot \mathcal{F}(z)).$$

Заметим, что все элементы матрицы $I - zA$ – полиномы второго порядка относительно z . Поэтому ее определитель и все алгебраические дополнения – полиномы относительно z . Вспоминая, что элементы обратной матрицы суть отношения алгебраических дополнений к определителю, видим, что они являются рациональными дробями.

Если компоненты вектора $\mathcal{F}(z)$ – рациональные дроби, то и компоненты вектора $\mathcal{X}(z)$ будут рациональными дробями. Если рациональная дробь неправильная, то выделим ее целую часть – полином, а оставшуюся правильную дробь разложим на простейшие. Найдя для каждой простейшей дроби соответствующую ей последовательность по формуле (1.3.1), просуммируем эти последовательности и полином. Результат и будет решением задачи Коши.

Если компоненты $\mathcal{F}(z)$ не являются рациональными дробями, то следует найти последовательности

$$\mathcal{L}^{-1}((I - zA)^{-1} \cdot x_0) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}^{-1}(z \cdot (I - zA)^{-1} \mathcal{F}(z)),$$

а затем использовать свойство 3 (п.1.3):

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1}((I - zA)^{-1} \cdot x_0 + z \cdot (I - zA)^{-1} \cdot \mathcal{F}(z)) = \\ & = \mathcal{L}^{-1}((I - zA)^{-1} \cdot x_0) + \left(\mathcal{L}^{-1}(z \cdot (I - zA)^{-1}) * f \right). \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$x_{k+1} = A \cdot x_k; \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad -\frac{1}{3}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 49.5 & 99.5 \end{bmatrix}.$$

Выполним описанные выше операции:

$$I - zA = \begin{bmatrix} 1 - z & -z \\ -49.5z & 1 - 99.5z \end{bmatrix};$$

$$(I - zA)^{-1} = \frac{1}{1 - 100.5z + 50z^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 - 99.5z & z \\ 49.5z & 1 - z \end{bmatrix};$$

$$(I - zA)^{-1} \cdot x_0 = \frac{1}{3(1 - 0.5z)} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad x_k = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (1.4.1)$$

Серьезное предупреждение. Сравним первую компоненту решения, полученную по формуле (1.4.1) (второй столбец таблицы) и вычисленную "в лоб", т.е. по формуле $x_{k+1} = A \cdot x_k$ (третий столбец таблицы).

k		
0	6.666667E-01	6.666667E-01
1	3.333333E-01	3.333334E-01
2	1.666667E-01	1.666697E-01
3	8.333334E-02	8.363286E-02
4	4.166667E-02	7.161875E-02
5	2.083333E-02	3.016042E+00
6	1.041667E-02	2.995313E+02
7	5.208333E-03	2.995209E+04
8	2.604167E-03	2.995208E+06
9	1.302083E-03	2.995208E+08

Эффект, наблюдаемый в третьем столбце, объясняется тем, что семейство всех решений нашего разностного уравнения имеет вид

$$x_k = 100^k \cdot A_1 x_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot A_2 x_0,$$

где

$$A_1 = \frac{1}{199} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 99 & 198 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \frac{1}{199} \cdot \begin{bmatrix} 198 & -2 \\ -99 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, кроме *убывающей* геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$ решение может содержать *быстро растущую* геометрическую прогрессию со знаменателем 100. В нашем примере эта быстро растущая последовательность подавлялась за счет *специального подбора начальных условий* ($A_1 x_0 = \theta$). При счете "в лоб" она возникает из-за погрешностей машинной арифметики и быстро становится доминирующей (посмотрите на четыре последних строки в таблице).

Этот пример показывает, что решать разностные уравнения "в лоб" без предварительного тщательного их анализа недопустимо.

1.5. Решение задачи Коши для уравнений высших порядков

Выше было показано, что задача Коши для разностного уравнения, порядок которого выше единицы, может быть преобразована в эквивалентную задачу Коши для векторного разностного уравнения первого порядка. Однако иногда целесообразнее решать задачу в ее исходном виде.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения порядка n :

$$x_{k+n} = p_{n-1} \cdot x_{k+n-1} + \dots + p_0 \cdot x_k + f_k; \quad p_0 \neq 0;$$

$$x_0, \dots, x_{n-1} \quad \text{заданы.}$$

Умножив обе части уравнения на z^{k+n} и просуммировав по k , получим

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_{k+n} z^{k+n} = p_{n-1} \cdot z \sum_{k=0}^{+\infty} x_{k+n-1} z^{k+n-1} + \dots$$

$$\dots + p_0 z^n \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^k + z^n \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^k. \quad (1.5.1)$$

Обозначим $\mathcal{L}(f_k) = \mathcal{F}(z)$, $\mathcal{L}(x_k) = \mathcal{X}(z)$. Тогда (1.5.1) примет вид

$$\begin{aligned} & \mathcal{X}(z) - x_0 - \dots - x_{n-1}z^{n-1} = \\ & = p_{n-1} \cdot z (\mathcal{X}(z) - x_0 - \dots - x_{n-2}z^{n-2}) + \dots + p_0 z^n \cdot \mathcal{X}(z) + z^n \cdot \mathcal{F}(z). \end{aligned}$$

Решив это уравнение относительно $\mathcal{X}(z)$, получим

$$\mathcal{X}(z) = \frac{Q(z)}{1 - p_{n-1}z - \dots - p_0 z^n} + z^n \cdot \frac{1}{1 - p_{n-1}z - \dots - p_0 z^n} \cdot \mathcal{F}(z).$$

Здесь $Q(z)$ – полином *порядка* n (его коэффициенты определяются начальными условиями).

Если $\mathcal{F}(z)$ – рациональная дробь, то $\mathcal{X}(z)$ также будет рациональной дробью. Если эта дробь неправильная, то выделяем целую часть – полином. Оставшуюся правильную дробь следует разложить на простейшие, а затем для каждой простейшей дроби найти соответствующую ей последовательность по формуле (1.3.2). Искомая последовательность (x_k) будет суммой найденных таким образом последовательностей.

Если $\mathcal{F}(z)$ не является рациональной дробью, то следует найти последовательности

$$\begin{aligned} (u_k) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{Q(z)}{1 - p_{n-1}z - \dots - p_0 z^n} \right), \\ (v_k) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{z^n}{1 - p_{n-1}z - \dots - p_0 z^n} \right), \end{aligned}$$

после чего решение найдется по формуле

$$x_k = u_k + (v * f)_k.$$

Замечание. Предупреждаем, что реализовать последний алгоритм удастся чрезвычайно редко!