

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

2.1. Равномерное приближение

Как известно, компьютер "умеет" выполнять четыре арифметических действия. С помощью этих действий можно вычислять значения полиномов и рациональных дробей. Как же вычисляются значения других стандартных функций? Рассмотрим этот вопрос на примере функции \sin .

В силу известных свойств синуса его вычисление при любом значении операнда может быть сведено к вычислению на сегменте $[0, \frac{\pi}{2}]$. Эту задачу мы и будем решать.

Напомним, что синус был *определен* как сумма всюду сходящегося ряда

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Поэтому кажется естественным вычислять его значения с помощью отрезка этого ряда, т.е. полинома Тейлора, выбрав порядок этого полинома n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta_n = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} (|\sin(x) - T_{\sin}(n, x)|) \leq \varepsilon$$

(ε – допустимая погрешность).

Однако полином T_{\sin} , как и всякий полином Тейлора, хорошо (лучше всех полиномов того же порядка) имитирует поведение функции в *достаточно малой* окрестности точки (в данном случае – нуля). Ни из чего не следует, что он будет обладать этим свойством на сегменте $[0, \frac{\pi}{2}]$. Поэтому представляется, что можно, не увеличивая порядок полинома, уменьшить погрешность Δ_n .

Совсем очевидно это для полинома первого порядка (функции-константы). Полином Тейлора в этом случае – тождественный нуль, и $\Delta_1 = 1$. В то же время, если взять полином $S_1(x) \equiv 0.5$, то $\Delta_1 = 0.5$. Отметим, что наибольшего значения *отклонение* $|S_1(x) - \sin(x)|$ достигает на концах сегмента.

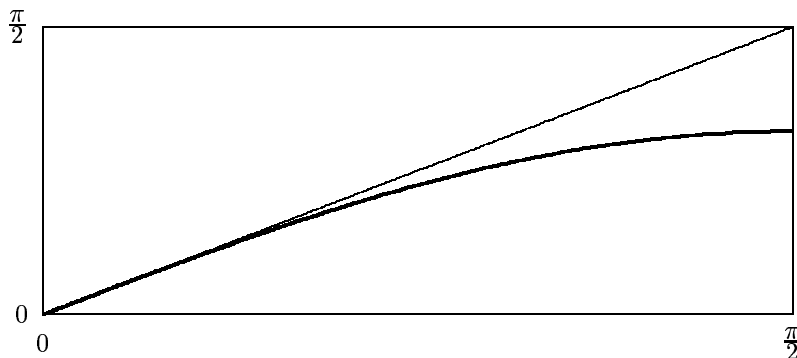


Рис. 1: Графики $\sin(x)$ (жирная линия) и $T_{\sin}(2, x)$

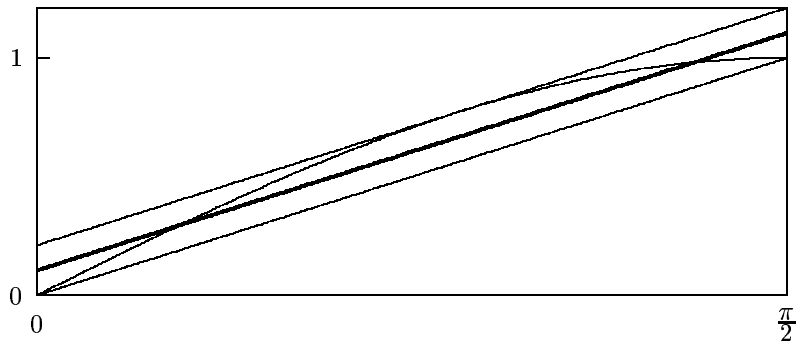
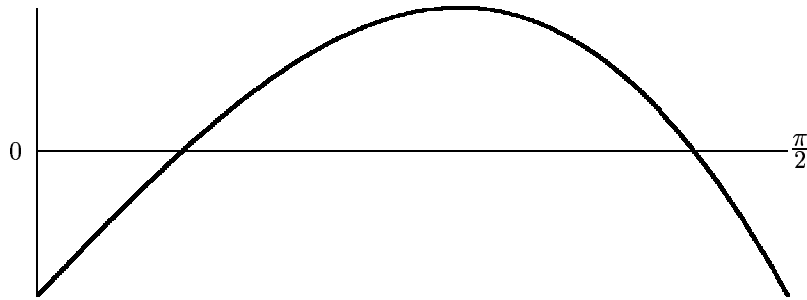
Рассмотрим теперь полиномы второго порядка. На рис.2.1 изображены графики синуса и его полинома Тейлора $T_{\sin}(2, x) = x$. Видно, что отклонение растет на сегменте и его наибольшее значение достигается при $x = \frac{\pi}{2}$: $\Delta_2 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.5708$. Если же построить хорду, соединяющую концы дуги, и касательную к графику синуса, параллельную этой хорде, то прямая, лежащая точно посередине между хордой и касательной (рис.2.2) – это график полинома $S_2(x) = a + b \cdot x$, где

$$a = \frac{1}{2} \sin \left(\arccos \left(\frac{2}{\pi} \right) \right) - \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{2}{\pi} \right), \quad b = \frac{2}{\pi}.$$

Из рис.2.3 видно, что наибольшее значение отклонения достигается в трех точках: $x_0 = 0$, $x_1 = \arccos(b)$ и $x_2 = \pi/2$. При этом $\Delta_2 = a \approx 0.1053$, что существенно меньше, чем при замене синуса его полиномом Тейлора.

Полиномы S_1 и S_2 – это простейшие полиномы *наилучшего равномерного приближения* для функции \sin на сегменте $[0, \frac{\pi}{2}]$. Имеет место

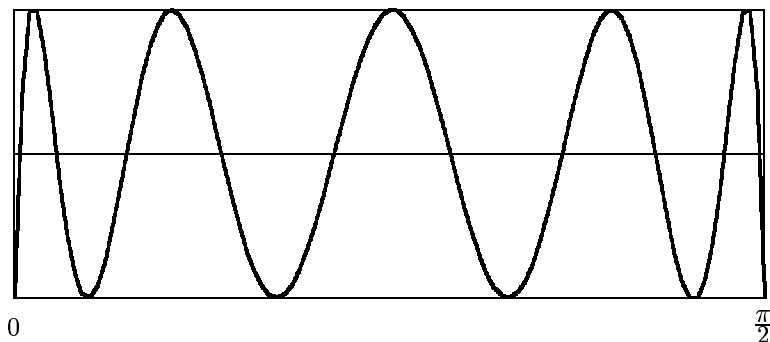
Теорема 1. Для всякой непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции f и всякого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный полином S_n *порядка* n , для которого $\Delta_n = \max_{[\alpha, \beta]} (|S_n(x) - f(x)|)$ *меньше*, чем для любого другого полинома того же порядка. Этот полином называют полиномом *наилучшего равномерного приближения* порядка n для функции f на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Рис. 2: График $S_2(x)$ (жирная линия)Рис. 3: График функции $\sin(x) - S_2(x)$

2. При $n \rightarrow +\infty$ $\Delta_n \rightarrow 0$. Поэтому непрерывную на сегменте функцию можно равномерно приблизить полиномом с любой точностью, если взять порядок полинома достаточно большим (это утверждение называется теоремой Вейерштрасса).

3. Полином наилучшего равномерного приближения характеризуется следующим свойством: на сегменте $[\alpha, \beta]$ существует по крайней мере $n + 1$ такая точка x_0, x_1, \dots, x_n , что $|S_n(x_k) - f(x_k)| = \Delta_n$, причем знаки разности $S_n(x_k) - f(x_k)$ в этих точках чередуются. Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются точками *чебышевского¹ альтернанса*.

На рис.2.4 представлен график разности между синусом и его полиномом наилучшего равномерного приближения десятого порядка на $[0, \frac{\pi}{2}]$. На графике хорошо видны 11 точек альтернанса. Здесь $\Delta_{10} \approx 3.3 \times 10^{-11}$. Заметим, что полином Тейлора того же порядка дает погрешность 3.6×10^{-6} (!).

Рис. 4: $\sin(x) - S_{10}(x)$

Замечания. 1. Полиномы наилучшего равномерного приближения используются для вычисления значений стандартных функций в компьютерах (конечно, это не единственный способ).

2. "Приближение функций" состоит, по существу, в замене одной функции ("неудобной" в каком-то смысле) на другую ("удобную" в том же смысле). Возникающая при замене погрешность должна, конечно, лежать в допустимых пределах. С приближением функций мы встречались ранее в задаче численного интегрирования. При этом подынтегральная функция заменялась полиномиальным интерполяционным сплайном.

¹Пафнутий Львович ЧЕБЫШЕВ (1821-1894) – русский математик и механик, основатель Петербургской математической школы, член Петербургской, Берлинской, Болонской, Парижской, Шведской АН, член Лондонского Королевского общества, почетный член многих русских и иностранных научных обществ и университетов.

В этом пункте мы рассмотрели применение приближения функций для вычисления значений этих функций. Здесь было естественно принять в качестве погрешности приближения наибольшее значение отклонения (модуля разности между приближаемой и приближающей функциями).

Заметим, что введя в линейном пространстве функций, непрерывных на сегменте $[\alpha, \beta]$, норму по правилу

$$\|f\|_C = \max_{x \in [\alpha, \beta]} (|f(x)|)$$

(убедитесь, что это действительно норма!), мы представим введенную нами погрешность в виде нормы разности между приближаемой и приближающей функциями:

$$\Delta_n = \|f - S_n\|_C.$$

В других применениях приближения функций естественным оказывается использование других норм для определения понятия "погрешность приближения".

В курсе линейной алгебры изучалась задача о сглаживании экспериментальных данных полиномами, ортогональными на сетке. Эту задачу можно рассматривать и как задачу приближения заданного вектора линейной комбинацией векторов из некоторого семейства. Напомним, что погрешность приближения при этом определялась как норма разности, порожденная скалярным произведением. Выбор такого определения объяснялся двумя причинами:

- 1) оно не противоречит здравому смыслу;
- 2) имеет простую геометрическую интерпретацию;
- 3) задача сводится к системе *линейных* уравнений.

В следующих пунктах будет рассмотрена аналогичная норма в пространстве кусочно непрерывных функций и задача приближения функций по этой норме.

2.2. Ортогональные последовательности функций

Рассмотрим линейное пространство кусочно непрерывных на сегменте $[\alpha, \beta]$ комплекснозначных функций. Введем в этом пространстве скалярное произведение по правилу

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi \cdot \overline{\psi}. \quad (2.2.1)$$

Нетрудно убедиться в том, что такое определение удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, кроме одной. Если (что естественно) считать *нулем* линейного пространства функцию, равную нулю *тождественно*, то из равенства нулю скалярного квадрата функции *не следует*, что эта функция – нулевая (вспомните, что интеграл от функции, отличной от нуля в одной точке сегмента, равен нулю).

Чтобы устранить противоречие, *договариваются* не различать две функции, значения которых различны в *конечном* числе точек сегмента. При такой договоренности нулем введенного пространства будет всякая функция, *почти всюду* равная нулю (отличная от нуля лишь в конечном числе точек сегмента).

Теперь формула (2.2.1) действительно задает скалярное произведение. Введем также норму, порождаемую этим скалярным произведением:

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}. \quad (2.2.2)$$

Убедитесь, что все аксиомы нормы выполнены.

Замечание. Можно обобщить понятие "скалярное произведение", введя так называемое *скалярное произведение с весом*:

$$\langle \phi, \psi \rangle_r = \int_{\alpha}^{\beta} r \phi \overline{\psi}. \quad (2.2.3)$$

Здесь r – *почти всюду положительная* функция, именуемая *весом*.

Скалярное произведение (2.2.1) – это скалярное произведение с весом $r(x) \equiv 1$.

Для дальнейшего нам потребуются *ортогональные* (в смысле скалярного произведения (2.2.3)) последовательности функций. Приведем четыре примера таких последовательностей.

Примеры. 1. Тригонометрическая последовательность².

²По естественным причинам удобнее задавать эту последовательность не на множестве натуральных чисел \mathbb{N} , а на множестве целых чисел \mathbb{Z} .

Пусть $T > 0$. Рассмотрим на сегменте $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ функции

$$\varphi_k(x) = \exp\left(i\frac{2\pi k}{T}x\right); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left(i\frac{2\pi(k-m)}{T}x\right) dx = T \cdot \delta_{km}$$

(здесь δ_{km} – символ Кронекера).

Своим названием эта последовательность обязана тому, что долгое время вместо более удобных функций $\exp\left(i\frac{2\pi k}{T}x\right)$ использовались функции $\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)$ и $\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)$.

2. Функции Радемахера³.

Эти *кусочно постоянные* функции заданы на $[0, 1]$ правилом

$$r_0(x) \equiv 1; \quad r_k(x) = \text{sign}\left(\sin(2^k \pi x)\right); \quad k = 1, 2, \dots \text{ (рис.2.5).}$$

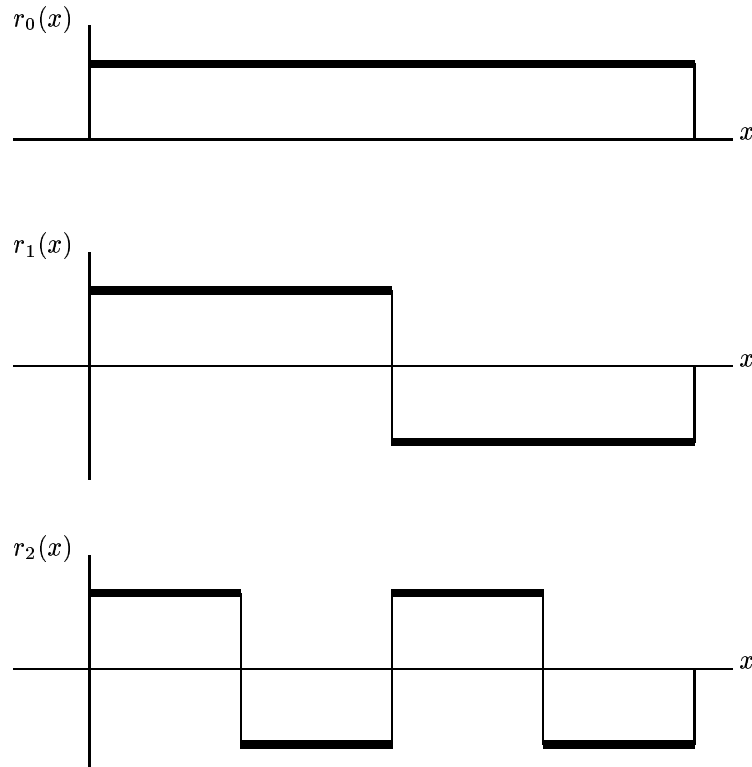


Рис. 5: Графики трех первых функций Радемахера r_0, r_1, r_2

Легко показать, что

$$\langle r_k, r_m \rangle = \int_0^1 r_k(x) r_m(x) dx = \delta_{km}.$$

3. Полиномы Лежандра⁴.

Эти полиномы заданы на $[-1, 1]$ правилом

$$P_0(x) \equiv 1; \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot ((x^2 - 1)^{(k)})^{(k)}; \quad k = 1, 2, \dots$$

³Ганс Адольф РАДЕМАХЕР (1892-1969) – немецкий математик, с 1936 года работал в США.

⁴Адриен Мари ЛЕЖАНДР (1752-1833) - французский математик, член Парижской АН.

Легко видеть, что P_k – полином степени k . Непосредственное вычисление дает

$$\langle P_k, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2k+1} \cdot \delta_{km}.$$

4. Полиномы Чебышева.

Эти полиномы заданы на $[-1, 1]$ правилом

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x)), \quad k = 0, 1, \dots$$

(проверьте, вычислив T_k для нескольких значений k , что это действительно полиномы).

Покажем, что полиномы Чебышева ортогональны с весом

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Действительно, подстановка $t = \arccos(x)$ дает

$$\begin{aligned} \langle T_k, T_m \rangle_r &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_m(x) dx = \int_0^\pi \cos(kt) \cos(mt) dt = \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (\cos((k-m)t) + \cos((k+m)t)) dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл, очевидно, равен нулю, если $k \neq m$.

2.3. Среднеквадратическое приближение.

Ряды Фурье

Пусть f – комплекснозначная, кусочно непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, а (φ_k) – ортогональная последовательность комплекснозначных функций, также кусочно непрерывных на $[\alpha, \beta]$.

Найдем линейную комбинацию первых n функций из этой последовательности, расстояние от которой до функции f (расстояние понимается как определенная равенством (2.2.2) норма разности!) будет минимальным, т.е. найдем такие n чисел a_1, \dots, a_n , что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|$$

при любых числах b_1, \dots, b_n .

Как известно из курса линейной алгебры, если норма порождена скалярным произведением, всегда удобнее работать не с нормой, а с ее квадратом.

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - \left\langle f, \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k, \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = 0$ при $m \neq k$, имеем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \overline{b_k} \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=1}^n b_k \langle \varphi_k, f \rangle + \sum_{k=1}^n b_k \overline{b_k} \|\varphi_k\|^2.$$

Обозначив

$$\widehat{f}_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2},$$

получим

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|^2 &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n \left(-\overline{b_k} \widehat{f}_k - b_k \overline{\widehat{f}_k} + b_k \overline{b_k} \right) \|\varphi_k\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^m |\widehat{f}_k - b_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \end{aligned}$$

В этом равенстве переменными являются b_1, \dots, b_n . В силу неотрицательности последнего слагаемого искомый минимум достигается при $b_k = \widehat{f}_k$; $k = 1, \dots, n$. При этом

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \widehat{f}_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (2.3.1)$$

Определение. Числа $\widehat{f}_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2}$ называются *коэффициентами Фурье* функции f по ортогональной последовательности (φ_k) .

Последовательность сумм $\sum_{k=1}^n |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2$, очевидно, не убывает. Далее, из (2.3.1) видно, что

$$\sum_{k=1}^n |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2, \quad (2.3.2)$$

т.е. эта последовательность ограничена сверху. Поэтому числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2$$

сходится. Переходя в неравенстве (2.3.2) к пределу ($n = +\infty$), получим *неравенство Бесселя*⁵

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Если для некоторой функции f неравенство Бесселя превращается в равенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$$

(оно называется *равенством Парсеваля*⁶), то формула (2.3.1) показывает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n \widehat{f}_k \varphi_k \right\|^2 = 0.$$

Естественно переписать это соотношение так:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{f}_k \varphi_k = f$$

⁵Фридрих Вильгельм БЕССЕЛЬ (1784-1846) – немецкий астроном, член Берлинской АН, создатель Кенигсбергской обсерватории.

⁶Марк-Антуан ПАРСЕВАЛЬ (1755-1836) – французский математик.

и сказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k \quad (2.3.3)$$

(он называется *рядом Фурье* функции f по ортогональной последовательности (φ_k)) сходится к f в *среднем квадратическом* (или *по норме* (2.2.2)).

Обратно, если ряд (2.3.3) сходится к f в среднем квадратическом, то из формулы (2.3.1) несложно увидеть, что для функции f выполнено равенство Парсеваля.

Замечание. Равенство Парсеваля – аналог известной из школьной геометрии теоремы Пифагора.

Возникает вопрос: для всякой ли функции f , кусочно непрерывной на $[\alpha, \beta]$, справедливо равенство Парсеваля? Ответ на этот вопрос зависит от последовательности (φ_k) . Например, если "изъять" из последовательности один элемент φ_m , то для функции $f = \varphi_m$ все коэффициенты Фурье окажутся равными нулю, и равенство Парсеваля не будет иметь места.

В n -мерном унитарном пространстве ортогональный набор из n ненулевых векторов (ортогональный базис), как известно, обладает двумя свойствами:

1. Единственный вектор, ортогональный всем элементам базиса – нулевой.
2. Любой вектор пространства представим в виде линейной комбинации элементов базиса.

Аналогом понятия ортогонального базиса в бесконечномерном пространстве со скалярным произведением является понятие *замкнутой ортогональной системы* элементов (в нашем случае – функций).

Определение. Говорят, что ортогональная на $[\alpha, \beta]$ последовательность (φ_k) является замкнутой ортогональной системой, если для *любой* кусочно непрерывной на $[\alpha, \beta]$ функции имеет место равенство Парсеваля (т.е. ряд Фурье любой кусочно непрерывной функции f по этой последовательности сходится к f в среднем квадратическом).

Если ортогональная последовательность (φ_k) является замкнутой ортогональной системой, то единственная кусочно непрерывная функция, ортогональная всем φ_k – это нулевой элемент пространства (т.е. функция, отличная от нуля лишь в конечном числе точек). Действительно, если $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$, $k \in \mathbb{N}$, то все коэффициенты Фурье функции f равны нулю. Поэтому в силу равенства Парсеваля $\|f\| = 0$.

Пример. Можно показать, что тригонометрическая последовательность и последовательность полиномов Лежандра – замкнутые ортогональные системы, а последовательность функций Радемахера – нет (убедитесь, например, что функция $\cos(2\pi x)$ ортогональна на $[0, 1]$ всем функциям Радемахера).

Замечание. Все введенные в этом пункте определения переносятся на случай скалярного произведения с весом (2.2.3). Например, можно показать, что последовательность полиномов Чебышева – замкнутая ортогональная система на $[-1, 1]$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Естественно поставить вопрос: сходится ли к функции f во всех точках сегмента сходящийся к ней в среднем квадратическом ее ряд Фурье?

В общем случае ответ будет отрицательным. Существуют, например, "патологические" функции (*непрерывные на сегменте* $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$!), ряд Фурье которых по тригонометрической системе расходится на бесконечном множестве точек сегмента!

Для положительного ответа на вопрос следует предъявить к функции f дополнительные требования. Пример таких требований дает теорема Дирихле, сформулированная в следующем пункте.

2.4. Тригонометрические ряды Фурье и интегральные преобразования Фурье

Тригонометрическими рядами Фурье называют ряды Фурье по тригонометрической последовательности функций $\left(\exp\left(i\frac{2\pi k}{T}t\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \exp\left(i\frac{2\pi k}{T}t\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{-n}^n \hat{f}_k \exp\left(i\frac{2\pi k}{T}t\right),$$

где

$$\hat{f}_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}t\right) dt.$$

С точки зрения представления функций, заданных на сегменте, тригонометрические ряды Фурье не выделяются из рядов Фурье по другим замкнутым ортогональным системам функций (например, по полиномам Лежандра). Их особая роль выявляется при представлении *периодических* функций, часто встречающихся в приложениях.

Для тригонометрических рядов Фурье верна

Теорема Дирихле. 1. Тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной и *кусочно монотонной* на сегменте $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ функции f сходится во всех точках этого сегмента.

2. Если обозначить его сумму S , то

$$S\left(-\frac{T}{2}\right) = S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{f\left(-\frac{T}{2} + 0\right) + f\left(\frac{T}{2} - 0\right)}{2};$$

$$S(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} \quad \text{при} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}.$$

Сумма тригонометрического ряда Фурье кусочно непрерывной и кусочно монотонной функции f совпадает с этой функцией в точках ее непрерывности и равна полусумме левого и правого пределов f в точках ее разрыва.

Замечание. Для комплекснозначной функции f под кусочной монотонностью здесь и далее понимается кусочная монотонность функций $Re(f)$ и $Im(f)$.

Рассмотрим кусочно непрерывную и кусочно монотонную периодическую функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с периодом T . Обозначим f_T ее сужение на $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Разложим f_T в ряд Фурье по тригонометрической последовательности. В силу теоремы Дирихле при $|t| \leq \frac{T}{2}$ имеет место равенство

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right), \quad (2.4.1)$$

где, согласно (2.3.3),

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} t\right) dt.$$

Поскольку и левая, и правая части равенства (2.4.1) – T -периодические функции, то это равенство верно при всех $t \in \mathbb{R}$.

Замечание. В теории сигналов функция f описывает сигнал, состоящий из последовательности одинаковых импульсов f_T .

Сумма ряда Фурье с коэффициентами (2.4.1) определена на всей оси и дает "аналитическое представление" этой последовательности импульсов. Сигнал при этом представляется в виде бесконечной суммы гармонических колебаний с частотами $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ ($k \in \mathbb{Z}$), образующими равномерную сетку с шагом $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Последовательность коэффициентов Фурье $(\hat{f}_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ называют *комплексным Фурье-спектром* сигнала f и говорят, что спектр периодического сигнала *дискретен*.

Равенство Парсеваля

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f_T(t)|^2 dt = \|f_T\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_k|^2 \cdot T$$

показывает, как энергия импульса $E = \|f_T\|^2$ распределена между этими частотами.

Пример. Рассмотрим периодическую последовательность треугольных импульсов, изображенную на рис.2.6, один импульс которой задается формулой

$$f_T(t) = \begin{cases} \left|1 - \frac{2t}{T}\right| & \text{при} \quad |t| \leq \frac{T}{2}; \\ 0 & \text{при} \quad \frac{T}{2} < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

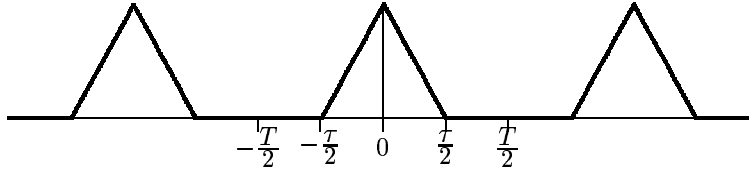


Рис. 6:

Найдем комплексный спектр этой последовательности:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left|1 - \frac{2t}{\tau}\right| \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \\
 &= \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\omega_k \tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega_k \tau}{2}\right)^2} \quad \left(\omega_k = \frac{2\pi k}{T}\right).
 \end{aligned}$$

Существуют электротехнические устройства, именуемые частотными фильтрами, электрическая проводимость которых зависит от частоты приложенного напряжения. Например, в *идеальном фильтре нижних частот* проводимость на частотах, которые не выше критической, равна единице, а на всех остальных частотах – нулю. Если напряжение U на входе такого фильтра представить в форме его ряда Фурье

$$\frac{U(t-0) + U(t+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right),$$

то напряжение V на выходе будет иметь форму, определяемую отрезком этого ряда (N – номер критической частоты)

$$V(t) = \sum_{k=-N}^{+N} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right).$$

Пример. На вход идеального фильтра нижних частот ($N = 5$) подана периодическая последовательность треугольных импульсов ($\tau/T = 0.25$). На рис.2.7 изображен один период входной и выходной последовательностей.

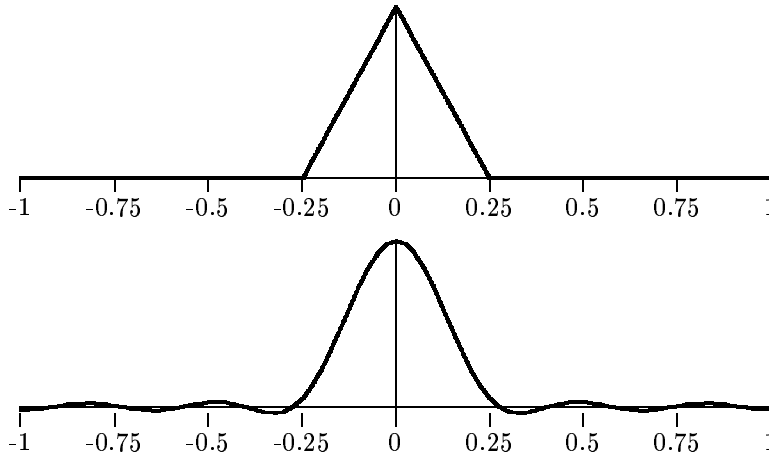


Рис. 7:

Пусть теперь $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – *непериодическая* кусочно непрерывная и кусочно монотонная на \mathbb{R} функция. Возьмем *произвольное положительное* число T и рассмотрим f_T – сужение функции f на сегмент $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Запишем известные равенства

$$\frac{f_T(t-0) + f_T(t+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right); \quad |t| < \frac{T}{2};$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} t\right) dt.$$

Ряд Фурье функции f_T , сходится на всей вещественной оси и, следовательно, определяет *новую* функцию

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Эта функция по теореме Дирихле совпадает с f почти всюду при $|t| < T/2$, а вне этого интервала является ее *периодическим продолжением* (рис.2.8).

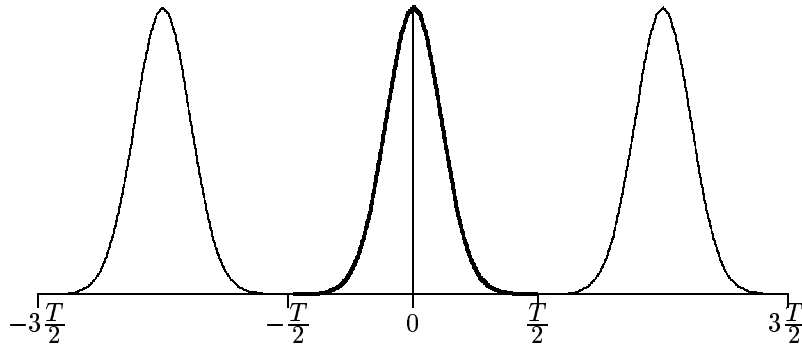


Рис. 8: Функция f_T (жирная линия) и ее периодическое продолжение

Нетрудно заметить, что увеличивая T , мы увеличим длину интервала, на котором F почти всюду совпадает с f . Возникает естественный вопрос: нельзя ли перейти к пределу ($T = +\infty$)?

Пример. Рассмотрим одиночный треугольный импульс единичной высоты и ширины τ :

$$f(t) = \begin{cases} \left|1 - \frac{2t}{\tau}\right| & \text{при } |t| \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Функция F (периодическое продолжение такого импульса), очевидно, совпадает с уже рассмотренной последовательностью треугольных импульсов (рис.2.6).

Если, сохраняя длину импульсов τ в этой последовательности, увеличивать период их повторения T , то шаг частотной сетки $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ будет уменьшаться и одновременно будут уменьшаться порции энергии $E_k = |\hat{f}_k|^2$, переносимые на дискретных частотах ω_k . Введем понятие *средней спектральной плотности* - отношения коэффициента Фурье к шагу частотной сетки

$$\tilde{f}(\omega_k) = \frac{\hat{f}_k}{\Delta\omega} = \frac{\tau}{2\pi} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\omega_k \tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega_k \tau}{2}\right)^2}.$$

Тогда формула (2.4.1) перепишется так:

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega_k) \cdot \exp(i\omega_k t) \cdot \Delta\omega. \quad (2.4.2)$$

Очевидно, ряд, стоящий справа, можно интерпретировать как квадратурную формулу левых прямоугольников для интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega, \quad (2.4.3)$$

где

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\tau}{2\pi} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt.$$

Поэтому можно рассчитывать, что при переходе к пределу ($T = +\infty$) ряд (2.4.2) превратится в интеграл (2.4.3). Действительно, имеет место

Теорема. Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – кусочно непрерывная и кусочно монотонная на \mathbb{R} функция, причем $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$, то имеет место равенство⁷

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = (V.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega, \quad (2.4.4)$$

где

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt. \quad (2.4.5)$$

Формулу (2.4.5) называют *прямым*, а формулу (2.4.4) – *обратным преобразованием Фурье*.

Замечание. В теории сигналов функцию \tilde{f} называют *спектральной плотностью* сигнала f и говорят, что спектр такого сигнала *непрерывен*.

На рис.2.9 изображена (пунктиром) спектральная плотность одиночного треугольного импульса, а также средняя спектральная плотность соответствующей последовательности треугольных импульсов при различных отношениях τ/T .

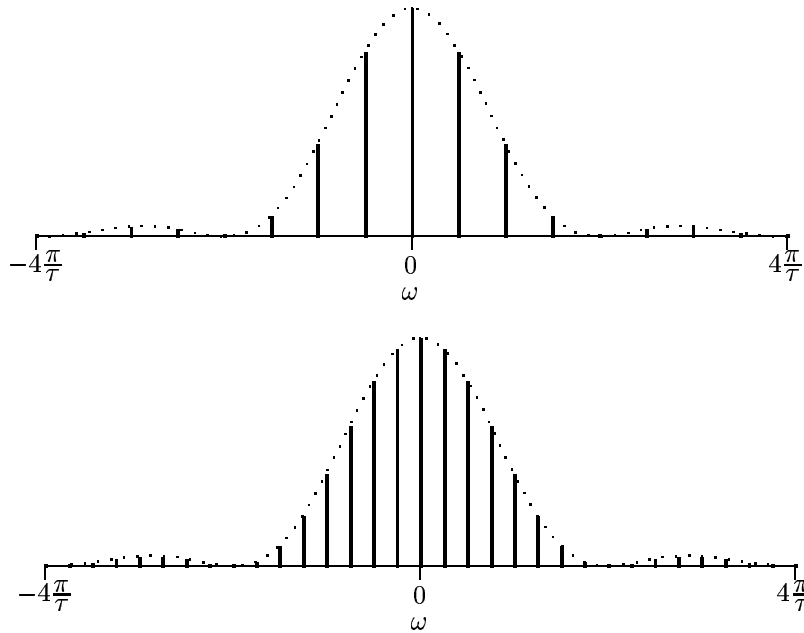


Рис. 9: Верхний рисунок – $\tau/T = 0.25$, нижний – $\tau/T = 0.125$

Серьезное предупреждение. В литературе встречается *по крайней мере шесть* разных способов записи интегральных преобразований Фурье.

Иногда множитель $\frac{1}{2\pi}$ переносят из формулы (2.4.5) в формулу (2.4.4):

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots; \quad \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot (V.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots$$

⁷Напоминаем, что V.p. – *главное значение* интеграла.

иногда его "равномерно распределяют" между двумя формулами:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots; \quad \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (V.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots$$

В некоторых книгах пишут в экспоненте знак " + " в прямом преобразовании, а знак " - " в обратном, например:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(i\omega t) dt;$$

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot (V.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Некоторые (но не все) свойства преобразований Фурье справедливы для любой формы записи. Поэтому мы настоятельно рекомендуем, услышав слова "преобразование Фурье", спросить: "А как это пишется?"

Замечание. Пусть f — оригинал, и $\int_0^{+\infty} |f| < +\infty$. Тогда преобразование Лапласа функции f , как известно, определено при $\operatorname{Re}(s) \geq 0$, и при $\operatorname{Re}(s) = 0$, очевидно, совпадает с одной из форм ее преобразования Фурье:

$$(\mathcal{L}f)(s)|_{s=i\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt.$$

Вообще свойства преобразований Фурье и Лапласа весьма схожи. В частности, если преобразование Фурье определено одной из формул

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(\pm i\omega t) dt,$$

то можно показать, что образ Фурье свертки двух функций равен произведению их образов Фурье:

$$\widetilde{(f_1 \otimes f_2)} = \tilde{f}_1 \cdot \tilde{f}_2.$$