

4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Множество всех решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка представляет собой *однопараметрическое* семейство функций. Для фиксации конкретного решения из этого семейства задают значение этого решения в некоторой точке (начальное условие). При этом получается рассмотренная ранее задача Коши.

Множество всех решений системы из двух линейных уравнений первого порядка представляет собой *двухпараметрическое* семейство вектор-функций, и фиксировать конкретное решение можно двумя способами: либо задать *оба* дополнительных условия в *одной* точке, получив уже известную задачу Коши, либо задать их в *двух* разных точках. В последнем случае задача называется *краевой* или *граничной*.

Аналогично, для линейного уравнения второго порядка можно поставить задачу Коши, задав начальные условия (значения решения и его первой производной) в одной точке, или поставить краевую задачу, задав дополнительные условия в двух точках.

Мы намерены ограничиться в этой главе лишь постановкой простейших краевых задач и рассмотрением алгоритмов их решения без технологических подробностей.

4.1. Одна содержательная задача

Рассмотрим задачу о *стационарном* тепловом режиме в *тонком* проводнике длиной ℓ , нагреваемом проходящим по нему током. Будем называть проводник тонким, если можно считать, что во всех точках его поперечного сечения температура одинакова. Боковая поверхность проводника покрыта идеальной термоизоляцией. На концах искусственно поддерживается заданная температура (рис.4.1).



Рис. 1: Тонкий проводник, нагреваемый током

Будем считать, что проводник состоит из элементов одинаковой длины (рис.4.2) и температура постоянна в пределах каждого из элементов.

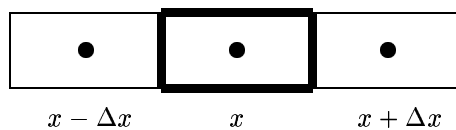


Рис. 2: К выводу уравнения теплового баланса

Найдем приращение количества тепла ΔQ в элементе проводника длиной Δx с центром в точке x за время Δt .

Поскольку боковая поверхность проводника теплоизолирована, ΔQ есть сумма трех слагаемых:

1. Тепло, выделенное током. Если ток постоянный, это тепло пропорционально времени и объему куска проводника:

$$\Delta Q_1 = \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot S.$$

Здесь S – площадь сечения проводника, γ – константа.

2. Тепло, поступившее из *правого* соседнего элемента. Оно пропорционально времени, площади сечения проводника, разности температур в точках $x + \Delta x$ и x и обратно пропорционально расстоянию между этими точками:

$$\Delta Q_2 = \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x}. \quad (4.1.1)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности материала проводника.

3. Тепло, поступившее из *левого* соседнего элемента:

$$\Delta Q_3 = \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(x - \Delta x) - T(x)}{\Delta x}.$$

В стационарном режиме количество тепла в элементе проводника не меняется, т.е.

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 0, \quad (4.1.2)$$

или

$$\lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} - \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(x) - T(x - \Delta x)}{\Delta x} + \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot S = 0.$$

Разделив обе части уравнения на $\Delta t \cdot \Delta x \cdot S$, получим

$$-\frac{\lambda \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} - \lambda \frac{T(x) - T(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \gamma.$$

Перейдя к пределу ($\Delta x = 0$), получим континуальную модель задачи – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-(\lambda \cdot T')' = \gamma$$

с двумя краевыми (граничными) условиями:

$$T(0) = T_0; \quad T(\ell) = T_\ell.$$

Замечание. Мы сознательно не вынесли за знак производной коэффициент теплопроводности, так как, вообще говоря, он может зависеть от x . Как видно из (4.1.1), функция $\lambda \cdot T'$ имеет физический смысл теплового потока через единицу площади данного сечения проводника в направлении "налево".

4.2. Основные определения

Краевая задача для *линейного* дифференциального уравнения *второго* порядка, частным случаем которой является задача из п.4.1, формулируется так:

Найти дважды непрерывно дифференцируемую на сегменте $[\alpha, \beta]$ функцию y , которая удовлетворяет уравнению

$$-(p \cdot y')' + q \cdot y = f, \quad (4.2.1)$$

а на концах сегмента – краевым условиям.

В уравнении (4.2.1) p – положительная, непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция; q, f – вещественные, непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции (в задаче из п.4.1 $p = \lambda > 0, \quad q = 0, \quad f = \gamma$).

Функция f называется свободным членом краевой задачи. Если $f = 0$, то краевая задача называется *однородной*.

Замечание. К виду (4.2.1) можно привести любое линейное уравнение второго порядка

$$y'' = r \cdot y' + s \cdot y + g, \quad (4.2.2)$$

где r, s, g – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции.

Действительно, сравним (4.2.2) с преобразованным уравнением (4.2.1)

$$y'' = -\frac{p'}{p} \cdot y' + \frac{q}{p} \cdot y - \frac{f}{p}.$$

Видно, что функция p есть одно из решений уравнения $-\frac{p'}{p} = r$. Например, можно положить $p(x) = \exp\left(-\int_{\alpha}^x r\right)$. Далее, $q = s \cdot p$ и, наконец, $f = -g \cdot p$.

Чаще всего на концах сегмента рассматривают краевые условия одного из трех типов:

1. $y(\alpha) = 0$ (краевое условие *первого* рода; в задаче о тепловом режиме это условие означает, что в точке α искусственно поддерживается нулевая температура);

2. $y'(\alpha) = 0$ (краевое условие *второго* рода; в задаче о тепловом режиме это условие означает, что левый конец проводника термоизолирован);

3. $y'(\alpha) - \mu_\alpha \cdot y(\alpha) = 0$, $\mu_\alpha > 0$ (краевое условие *третьего* рода; в задаче о тепловом режиме это условие означает, что на левом конце проводника *выходящий* тепловой поток пропорционален температуре).

Аналогично задается краевое условие в точке β . Но в условии третьего рода также рассматривается *выходящий* поток тепла, поэтому знак при коэффициенте μ меняется: $y'(\beta) + \mu_\beta \cdot y(\beta) = 0$, $\mu_\beta > 0$.

Замечание. Если краевые условия *не однородные* (в правой части стоит не нуль), то подстановка $y = Y + P_2$, где P_2 – полином второго порядка с неопределенными коэффициентами, дает возможность получить за счет выбора этих коэффициентов *однородные* краевые условия (проверьте это!). Поэтому мы будем рассматривать только задачу с однородными краевыми условиями.

Серьезное предупреждение. В отличие от задачи Коши, краевая задача может не иметь решения или иметь бесконечно много решений даже в простейших случаях.

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$-y'' = f, \quad y'(-1) = y'(1) = 0.$$

Если $f(x) \equiv 1$, то $y'(x) = -x + c$, $c = \text{const}$. Из первого краевого условия получаем $c = -1$, а из второго $c = 1$, что невозможно. С физической точки зрения этот результат очевиден: если в задаче из п.4.1 проводник теплоизолирован, то стационарное распределение температуры невозможно – под действием тока он будет нагреваться неограниченно!

С другой стороны, если $f(x) = x$, то $y'(x) = -x^2/2 + c$. Из граничных условий видно, что $c = 1/2$. Поэтому

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + c_1,$$

где c_1 – произвольная константа, т.е. задача имеет бесконечно много решений.

Обозначим \mathcal{D}_L линейное пространство функций, дважды непрерывно дифференцируемых на $[\alpha, \beta]$ и *удовлетворяющих поставленным краевым условиям*. Зададим на \mathcal{D}_L линейный (проверьте это!) оператор

$$L\phi \equiv -(p \cdot \phi')' + q \cdot \phi. \quad (4.2.3)$$

Тогда исходная краевая задача запишется в виде

$$Ly = f; \quad y \in \mathcal{D}_L. \quad (4.2.4)$$

Замечание. Напомним, что в определение оператора входит не только "формула", по которой он действует, но и его *область определения* \mathcal{D}_L . Поэтому операторы с одним и тем же "дифференциальным выражением" (4.2.3) и с разными граничными условиями – разные операторы!

Можно показать, что задача (4.2.4) "устроена" так же, как уравнение Фредгольма второго рода. Именно, справедлива теорема, в точности повторяющая теорему Фредгольма.

Теорема. Если *однородная* краевая задача для уравнения (4.2.1) имеет *только* нулевое решение ($y(x) \equiv 0$), то соответствующая неоднородная задача имеет *единственное* решение при *любом* свободном члене. Если же однородная задача имеет *ненулевое* решение, то соответствующая неоднородная задача либо неразрешима, либо имеет бесконечное множество решений.

Замечания. 1. В приведенном выше примере однородная задача $-y'' = 0$, $y'(-1) = y'(1) = 0$, очевидно, имеет решение $y(x) = \text{const}$.

2. Так же, как в задаче Коши, можно рассматривать уравнения вида (4.2.1) с *кусочно непрерывными* коэффициентами и правой частью. Такие уравнения естественно возникают в различных приложениях. Например, если в задаче из п.4.1 проводник составлен из нескольких материалов с разными теплопроводностями, то коэффициент λ будет кусочно непрерывным. Поскольку $\lambda \cdot T'$ должна быть первообразной от $(-\gamma)$, т.е. непрерывной функцией, решение T должно иметь кусочно непрерывную производную, разрывы которой согласованы с разрывами λ . Аналогично понимается решение и в общем случае. Сформулированная теорема при этом остается верной.

4.3. Задача Штурма – Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу

$$L\varphi = \nu \cdot \varphi; \quad \varphi \in \mathcal{D}_L, \quad (4.3.1)$$

где ν – комплексное число.

Очевидно, что эта задача всегда имеет решение $\varphi(x) \equiv 0$.

Определение. Если задача (4.3.1) имеет *ненулевое* решение $\varphi \in \mathcal{D}_L$, то число ν называется *собственным числом*, а функция φ – соответствующей (этому числу) *собственной функцией* ("собственным вектором") оператора L .

Задача об отыскании собственных функций оператора L называется задачей Штурма¹ – Лиувилля².

Покажем, что для любых функций $y, z \in \mathcal{D}_L$ справедливо равенство

$$\langle Ly, z \rangle = \langle y, Lz \rangle, \quad (4.3.2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – обычное скалярное произведение на $[\alpha, \beta]$, определенное равенством (2.2.1).

Для определенности предположим, что на обоих концах сегмента $[\alpha, \beta]$ задано краевое условие первого рода. Распишем скалярное произведение в левой части (4.3.2):

$$\langle Ly, z \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} Ly \cdot \bar{z} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(-(p \cdot y')' + q \cdot y \right) \cdot \bar{z}.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим

$$\begin{aligned} \langle Ly, z \rangle &= -p(\beta) \cdot y'(\beta) \cdot \bar{z}(\beta) + p(\alpha) \cdot y'(\alpha) \cdot \bar{z}(\alpha) + \\ &+ \int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot y' \cdot \bar{z}' + q \cdot y \cdot \bar{z}) \cdot \end{aligned}$$

Поскольку z удовлетворяет граничным условиям, внеинтегральные члены обращаются в нуль. Окончательно имеем

$$\langle Ly, z \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot y' \cdot \bar{z}' + q \cdot y \cdot \bar{z}) \cdot \quad (4.3.3)$$

Проделав такие же преобразования с правой частью (4.3.2) и воспользовавшись тем, что y также удовлетворяет граничным условиям, мы вновь придем к (4.3.3).

Убедитесь в том, что равенство (4.3.2) верно и для краевых условий второго и третьего рода.

Свойство (4.3.2) оператора L аналогично самосопряженности квадратной матрицы. Как известно из курса линейной алгебры, всякая эрмитова матрица имеет ортогональный собственный базис, а все ее собственные числа вещественны. Оказывается, для задачи (4.3.1) справедлива

Теорема. 1. Все собственные числа оператора L вещественны. Они образуют неограниченно возрастающую последовательность $(\nu_k)_{k=1}^{+\infty}$. Каждому собственному числу соответствует ровно одна (с точностью до числового множителя) собственная функция φ_k . Более того, все собственные функции могут быть выбраны вещественными.

2. Собственные функции оператора L попарно ортогональны на $[\alpha, \beta]$, т.е. при $k \neq m$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_k \cdot \bar{\varphi}_m = 0.$$

3. Последовательность $(\varphi_k)_{k=1}^{+\infty}$ замкнута в пространстве кусочно непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций со скалярным произведением (2.2.1).

Замечание. Вместо (4.3.1) можно рассмотреть более общую задачу

$$L\varphi = \nu \cdot r \cdot \varphi; \quad \varphi \in \mathcal{D}_L, \quad (4.3.4)$$

где r – положительная, непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, именуемая *весом*. Ненулевые решения задачи (4.3.4) называются собственными функциями оператора L с весом r .

¹Жак Шарль Франсуа ШТУРМ (1803-1855) – французский математик, член Парижской АН, иностранный почетный член Петербургской АН. Его основные работы посвящены краевым задачам математической физики.

²Жозеф ЛИУВИЛЛЬ (1809-1882) – французский математик, член Парижской АН, иностранный почетный член Петербургской АН. Работы по общей теории аналитических функций, теории чисел, статистической механике. Построил теорию эллиптических функций.

Для задачи (4.3.4) остается справедливым первое утверждение теоремы. Во втором и третьем утверждениях следует заменить обычное скалярное произведение (2.2.1) на скалярное произведение с весом (2.2.3).

Теорема. Если $q(x) \geq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ (в случае, если на обоих концах сегмента $[\alpha, \beta]$ заданы краевые условия второго рода, следует дополнительно потребовать, чтобы функция q не была нулевой), то все собственные числа оператора L положительны.

Доказательство. Предположим для определенности, что на обоих концах сегмента заданы условия первого рода. Умножив уравнение (4.3.1) скалярно на φ , получим

$$\langle L\varphi, \varphi \rangle = \nu \cdot \|\varphi\|^2.$$

Преобразуем левую часть с учетом (4.3.3):

$$\int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot |\varphi'|^2 + q \cdot |\varphi|^2) = \nu \cdot \|\varphi\|^2.$$

Поскольку $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, то оба слагаемых под интегралом неотрицательны. Более того, если $p(x) \cdot |\varphi'(x)|^2 \equiv 0$, то $\varphi'(x) \equiv 0$, откуда в силу граничных условий ($\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$) получаем $\varphi(x) \equiv 0$, что невозможно. Поэтому весь интеграл положителен, и $\nu > 0$.

Попробуйте доказать теорему для других краевых условий.

Замечания. 1. В условиях последней теоремы однородная задача (4.2.4) имеет только нулевое решение. Согласно теореме из п.4.2, это означает, что краевая задача (4.2.4) однозначно разрешима при любом свободном члене.

2. Теорема без изменений переносится на случай задачи с весом (4.3.4).

4.4. Проекционные методы решения краевой задачи.

I. Метод Фурье

Будем искать решение краевой задачи в форме ряда Фурье по базису, состоящему из *вещественных* собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (4.3.1):

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{y}_k \cdot \varphi_k. \quad (4.4.1)$$

Подставив (4.4.1) в (4.2.4), получим *тождество*

$$L \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \hat{y}_k \cdot \varphi_k \right) = f.$$

Умножая это тождество скалярно на *все* базисные функции φ_m , получим *бесконечную* систему уравнений

$$\left\langle L \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \hat{y}_k \cdot \varphi_k \right), \varphi_m \right\rangle = \langle f, \varphi_m \rangle, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Применим тождество (4.3.2) и учтем, что $L\varphi_m = \nu_m \cdot \varphi_m$. Получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle \hat{y}_k \cdot \varphi_k, \nu_m \cdot \varphi_m \rangle = \langle f, \varphi_m \rangle.$$

В силу попарной ортогональности собственных функций в левой части остается только одно слагаемое – бесконечная система уравнений оказывается *диагональной*:

$$\nu_m \hat{y}_m \cdot \|\varphi_m\|^2 = \langle f, \varphi_m \rangle, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Если предположить, что все ν_k отличны от нуля (вспомните теорему из п.4.2!), то решение краевой задачи имеет вид

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\hat{f}_k}{\nu_k} \cdot \varphi_k, \quad (4.4.2)$$

где

$$\hat{f}_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \varphi_k}{\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi_k|^2}. \quad (4.4.3)$$

Замечание. Аналогично можно показать, что если известны собственные функции оператора L с весом r , то коэффициенты \hat{f}_k в (4.4.2) вычисляются по формуле

$$\hat{f}_k = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \varphi_k}{\int_{\alpha}^{\beta} r \cdot |\varphi_k|^2}.$$

Примеры. 1. $y'' + y = -\exp(2x)$, $y(1) = y(2) = 0$.

Приведем уравнение к виду (4.2.1):

$$-y'' - y = \exp(2x).$$

Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv -1$, $f(x) = \exp(2x)$.

Задача Штурма – Лиувилля, определяющая собственные числа и собственные функции оператора, имеет вид

$$-\varphi'' - \varphi = \nu \cdot \varphi, \quad \varphi(1) = \varphi(2) = 0.$$

Перепишем дифференциальное уравнение для собственной функции так:

$$-\varphi'' = \mu \cdot \varphi, \quad \mu = \nu + 1.$$

Из теоремы, доказанной в конце предыдущего пункта, следует, что $\mu > 0$. Убедитесь (например, с помощью преобразования Лапласа), что двумерное пространство всех решений этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = A \cos(\gamma x) + B \frac{\sin(\gamma x)}{\gamma}$$

(здесь $\gamma = \sqrt{\mu}$).

Подставляя это двухпараметрическое семейство в краевые условия, получим однородную систему уравнений для определения A и B :

$$\begin{cases} \cos(\gamma) \cdot A + \frac{\sin(\gamma)}{\gamma} \cdot B = 0 \\ \cos(2\gamma) \cdot A + \frac{\sin(2\gamma)}{\gamma} \cdot B = 0. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Ненулевое решение эта система имеет, если ее определитель равен нулю. Следовательно, γ должно быть корнем уравнения

$$\frac{\sin(\gamma)}{\gamma} = 0.$$

Отсюда

$$\gamma_k = k\pi \quad (\nu_k = k^2\pi^2 - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Подставив найденные γ_k в (4.4.4), выберем какое-нибудь ненулевое решение этой системы, например,

$$A_k = -\sin(\gamma_k) = 0, \quad B_k = \gamma_k \cos(\gamma_k) = (-1)^k \cdot k\pi.$$

Тогда

$$\varphi_k(x) = \sin(k\pi(x-1)); \quad \|\varphi_k\|^2 = \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \int_1^2 \sin^2(k\pi(x-1)) dx = \frac{1}{2}.$$

Вычислив коэффициенты в (4.4.3):

$$\hat{f}_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\int_1^2 \exp(2x) \cdot \sin(k\pi(x-1)) dx}{\frac{1}{2}} = 2 \frac{(-1)^k e^2 (e^2 - 1)}{k^2 \pi^2 + 4},$$

найдем решение краевой задачи по формуле (4.4.2):

$$y(x) = 2e^2(e^2 - 1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k^2 \pi^2 - 1)(k^2 \pi^2 + 4)} \cdot \sin(k\pi(x-1)).$$

График решения представлен на рис.4.3.

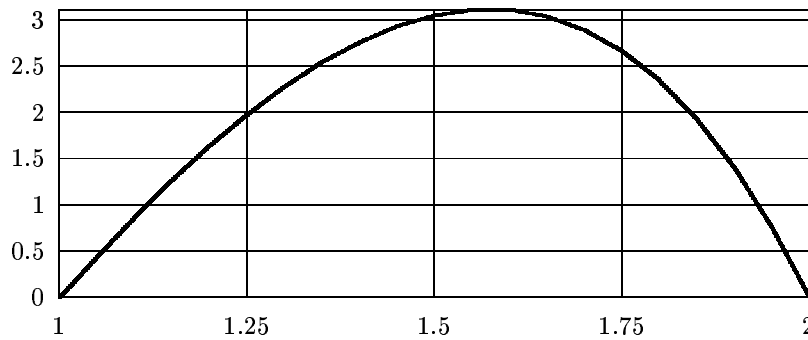


Рис. 3:

$$2. \quad y'' + \frac{1}{x} \cdot y' + y = 1, \quad y(1) = y(2) = 0.$$

Приведем уравнение к виду (4.2.1):

$$-(x \cdot y')' - x \cdot y = -x.$$

Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p(x) = x$, $q(x) = -x$, $f(x) = -x$.

Рассмотрим задачу о собственных функциях оператора $Ly \equiv -(x \cdot y')' - x \cdot y$ с весом x :

$$-(x \cdot \varphi')' - x \cdot \varphi = \nu \cdot x \cdot \varphi, \quad \varphi(1) = \varphi(2) = 0.$$

Дифференциальное уравнение для собственных функций может быть переписано так:

$$-(x \cdot \varphi')' = (\nu + 1) \cdot x \cdot \varphi.$$

Известно (См., например, Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979), что двухмерное пространство всех решений этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = AJ_0(\gamma x) + BY_0(\gamma x),$$

где $\gamma = \sqrt{\nu + 1}$; J_0 , Y_0 – функции Бесселя (цилиндрические функции) нулевого порядка, первого и второго рода соответственно.

Краевые условия позволяют найти собственные числа оператора: *однородная* система линейных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(1) = J_0(\gamma) \cdot A + Y_0(\gamma) \cdot B = 0 \\ \varphi(2) = J_0(2\gamma) \cdot A + Y_0(2\gamma) \cdot B = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение только при равенстве нулю определителя ее матрицы. Следовательно, собственные числа являются решениями трансцендентного уравнения

$$J_0(\gamma) \cdot Y_0(2\gamma) - J_0(2\gamma) \cdot Y_0(\gamma) = 0.$$

На рис.4.4 представлен фрагмент графика левой части этого уравнения, а в таблице – значения первых шести его корней.

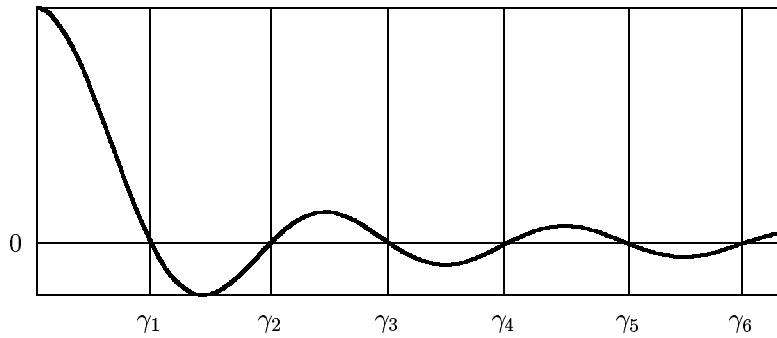


Рис. 4:

k	γ_k
1	3.123030920E+00
2	6.273435714E+00
3	9.418207542E+00
4	1.256142319E+01
5	1.570399789E+01
6	1.884624804E+01

Отметим, что алгоритм решения уравнений такого типа реализован в виде фортрановской программы, возвращающей заданное количество собственных чисел.

В качестве коэффициентов A_k и B_k можно взять, например, числа $A_k = Y_0(\gamma_k)$, $B_k = -J_0(\gamma_k)$. Итак,

$$\varphi_k(x) = Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x).$$

Вычисление коэффициентов Фурье

$$\hat{f}_k = \frac{\int_1^2 (Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x)) \cdot (-x) dx}{\int_1^2 (Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x))^2 \cdot x dx}$$

сводится к вычислению двух интегралов. Приведем результаты, полученные с помощью среды конечного пользователя MAPLE: интеграл в знаменателе равен

$$\frac{x^2}{2} \left((Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x))^2 + (Y_0(\gamma_k) \cdot J_1(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_1(\gamma_k x))^2 \right) \Big|_1^2,$$

интеграл в числителе –

$$\frac{1}{\gamma_k} (J_0(\gamma_k) \cdot Y_1(\gamma_k x) - Y_0(\gamma_k) \cdot J_1(\gamma_k x)) \Big|_1^2.$$

Здесь J_1 , Y_1 – функции Бесселя (цилиндрические функции) первого порядка, первого и второго рода соответственно.

Решение краевой задачи имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\hat{f}_k}{\gamma_k^2 - 1} \cdot (Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x)).$$

Его график представлен на рис.4.5.

Замечание. Как часто бывает, простой на первый взгляд алгоритм приводит при попытке им воспользоваться к весьма сложной *аналитической* задаче – нужно построить базис из собственных функций линейного оператора. В первом нашем примере это было несложно сделать, так как задача свелась к решению линейного

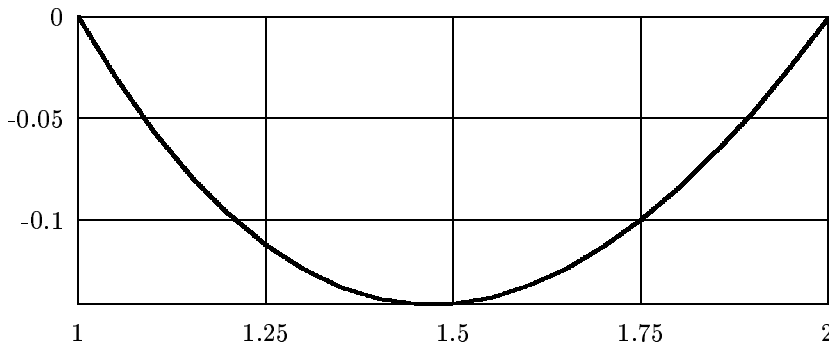


Рис. 5:

дифференциального уравнения с *постоянными* коэффициентами и к решению "школьного" трансцендентного уравнения $\frac{\sin(\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} = 0$.

Однако уже во втором примере пришлось обратиться к справочнику, к среде конечного пользователя и к Фортран-программе! Ведь собственные функции потому и называются *собственными*, что для каждого вновь встретившегося линейного оператора необходимо построить новую систему собственных элементов, т.е. найти решения новой задачи Штурма – Лиувилля.

Математики докомпьютерной эпохи проделали гигантскую работу: построены, изучены и *табулированы* (!) многочисленные функции, которые в отличие от "элементарных" (школьных) носят гордое название "специальные функции". Таковы функции Бесселя (цилиндрические), функции Лежандра (шаровые), функции Якоби (эллиптические)... См., например, "Справочник по специальным функциям".

В наше время нет необходимости обращаться к таблицам (и, как правило, даже к справочникам), так как библиотеки Фортрана располагают стандартными программами вычисления всех распространенных специальных функций, а такие среды конечного пользователя, как MAPLE и MATHEMATICA, не только вычисляют значения этих функций с произвольно заданным количеством значащих цифр, но и выполняют над ними аналитические операции.

Решение краевой задачи всегда стоит начать с изучения справочников, и если вновь возникшая задача – вариант уже решенной, то успех обеспечен.

А вот если наши великие предшественники не сумели построить собственные функции интересующего нас оператора, то это и Вам вряд ли удастся. Поэтому в следующем пункте будут конспективно изложены основы современной технологии решения краевых задач.

4.5. Проекционные методы решения краевой задачи.

II. Современные технологии

Предположим, что на обоих концах сегмента $[\alpha, \beta]$ заданы краевые условия третьего рода. Умножив скалярно уравнение (4.2.1) на произвольную кусочно гладкую, непрерывную функцию ϕ , получим равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} (-(p \cdot y')' + q \cdot y) \cdot \phi = \int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \phi. \quad (4.5.1)$$

Преобразуем (4.5.1), применяя интегрирование по частям (с учетом граничных условий)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (-(p \cdot y')' + q \cdot y) \cdot \phi &= -(py')\phi|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot y' \cdot \phi' + q \cdot y \cdot \phi) = \\ &= p(\alpha)\mu_{\alpha}y(\alpha)\phi(\alpha) + p(\beta)\mu_{\beta}y(\beta)\phi(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot y' \cdot \phi' + q \cdot y \cdot \phi) = \int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \phi. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Общая идея проекционных методов заключается в том, что приближенное решение краевой задачи ищут в виде линейной комбинации некоторого конечного набора линейно независимых функций $\{\phi_k\}$, $k = 1, \dots, N$, причем коэффициенты этой линейной комбинации находят из системы уравнений, которая получается подстановкой в (4.5.2) $\phi = \phi_n$, $n = 1, \dots, N$.

Если в качестве $\{\phi_k\}$ взять первые N собственных функций задачи (4.3.1), то, аналогично предыдущему пункту, легко получить, что каждое из уравнений (4.5.2) будет содержать только один неизвестный коэффициент

искомой линейной комбинации; полученные коэффициенты совпадают с первыми N коэффициентами Фурье функции y , т.е. приближенное решение в этом случае – просто частная сумма ряда Фурье точного решения. Однако, как уже указывалось, собственные функции известны лишь для считанного числа задач.

Поэтому заманчивой выглядит идея использовать во *всех* краевых задачах какие-нибудь несложные *стандартные* наборы. Например, взять в качестве такого набора первые N элементов последовательности тригонометрических функций

$$\phi_k(x) = A_k \cos(\gamma_k x) + B_k \frac{\sin(\gamma_k x)}{\gamma_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теоретически это возможно: за счет выбора параметра γ_k и коэффициентов A_k и B_k можно аналогично примеру 1 п.4.4 удовлетворить краевым условиям и затем решить систему уравнений (4.5.2). К сожалению, получающаяся система будет в общем случае иметь заполненную матрицу, т.е. каждое уравнение содержит все искомые коэффициенты.

В дальнейшем будем считать для простоты, что $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Зададим натуральное число N и построим на $[0, 1]$ *равномерную* сетку

$$x_n = nh; \quad n = 0, \dots, N+1; \quad h = \frac{1}{N+1}. \quad (4.5.3)$$

Построим функции (их именуют "палатками", см. рис.4.6)

$$\Pi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & \text{при } 0 \leq x \leq h \\ 0 & \text{при } x > h. \end{cases}$$

$$\Pi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < (n-1) \cdot h \\ \frac{x}{h} - (n-1) & \text{при } (n-1) \cdot h \leq x \leq n \cdot h \\ (n+1) - \frac{x}{h} & \text{при } n \cdot h \leq x \leq (n+1) \cdot h \\ 0 & \text{при } x > (n+1) \cdot h \end{cases} \quad n = 1, \dots, N.$$

$$\Pi_{N+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < N \cdot h \\ \frac{x}{h} - N & \text{при } N \cdot h \leq x \leq (N+1) \cdot h. \end{cases}$$

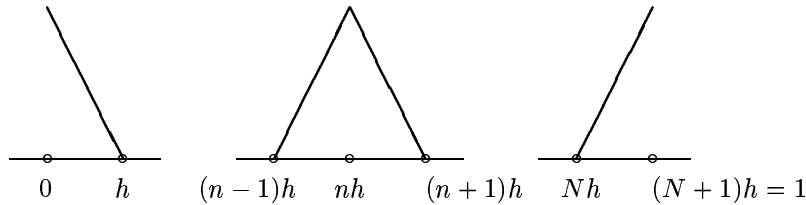


Рис. 6: Графики функций-"палаток"

Будем искать приближенное решение нашей краевой задачи в виде линейной комбинации этих "палаток", т.е. в виде непрерывного сплайна второго порядка на сетке (4.5.3):

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=0}^{N+1} c_k \cdot \Pi_k(x). \quad (4.5.4)$$

Заметим, что по определению "палаток" $\Pi_k(x_n) = \delta_{nk}$, и потому $c_k = \tilde{y}(x_k)$.

Подставляя (4.5.4) в (4.5.2) и полагая $\phi = \Pi_n$, получим

$$\sum_{k=0}^{N+1} a_{nk} \cdot c_k = b_n, \quad n = 0, \dots, N+1, \quad (4.5.5)$$

где

$$a_{nk} = \int_0^1 (p \cdot \Pi'_n \cdot \Pi'_k + q \cdot \Pi_n \cdot \Pi_k), \quad n, k = 1, \dots, N; \quad (4.5.6)$$

$$a_{0k} = a_{k0} = p(0)\mu_0 \cdot \delta_{0k} + \int_0^1 (p \cdot \Pi'_0 \cdot \Pi'_k + q \cdot \Pi_0 \cdot \Pi_k); \quad (4.5.7)$$

$$a_{N+1,k} = a_{k,N+1} = p(1)\mu_1 \cdot \delta_{N+1,k} + \int_0^1 (p \cdot \Pi'_{N+1} \cdot \Pi'_k + q \cdot \Pi_{N+1} \cdot \Pi_k); \quad (4.5.8)$$

$$b_n = \int_0^1 f \cdot \Pi_n, \quad n = 0, \dots, N+1. \quad (4.5.9)$$

Очевидно, что $(N+2) \times (N+2)$ -матрица A эрмитова. Далее, по построению

$$\sum_{k,n=0}^{N+1} a_{nk} c_k c_n = \langle L\tilde{y}, \tilde{y} \rangle. \quad (4.5.10)$$

Если q – неотрицательная функция, то аналогично доказательству теоремы в конце п.4.3 можно показать, что правая часть (4.5.10) положительна, если только $c \neq \theta$. Таким образом, в этом случае A – *положительно определенная* матрица. Поэтому система (4.5.5) при каждом N имеет единственное решение.

Однако это справедливо и для других наборов $\{\phi_k\}$. Основное достоинство "палаток" состоит в другом: при $|n-k| > 1$ промежутки, на которых они отличны от нуля, не пересекаются, и из (4.5.6) – (4.5.8) очевидно, что $a_{nk} = 0$. Матрица A системы (4.5.5) *оказывается трехдиагональной!* Сочетание положительной определенности и трехдиагональности обеспечило возможность создания быстрых и эффективных стандартных программ для решения системы.

Можно показать, что справедлива

Теорема. Пусть p – кусочно гладкая, непрерывная на $[0, 1]$ функция, q, f кусочно непрерывны на $[0, 1]$, причем $q \geq 0$. Если y – точное решение краевой задачи, а \tilde{y} – приближенное решение, задаваемое формулой (4.5.4), то для всех $x \in [0, 1]$ выполнена оценка

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq C \cdot h, \quad (4.5.11)$$

где C – некоторая положительная константа.

В частности, при $k = 0, 1, \dots, N+1$ $|c_k - y(x_k)| \leq C \cdot h$.

Замечания. 1. Один из возможных способов приближенного вычисления интегралов в формулах (4.5.6) – (4.5.9) состоит в следующем. Функции p, q, f аппроксимируются непрерывными сплайнами второго порядка на сетке (4.5.3), после чего интегралы легко выражаются через линейные комбинации значений этих функций в узлах сетки. Существенно, что коэффициенты линейных комбинаций стандартны и могут быть вычислены заранее.

2. В практических вычислениях константа C в оценке (4.5.11) обычно неизвестна. Поэтому стандартные программы численного решения краевых задач используют различные косвенные процедуры контроля точности. Простейший способ, как и при решении задачи Коши, состоит в последовательном дроблении шага h : вычисления проводятся до тех пор, пока относительное изменение приближенного решения не станет меньше наперед заданного ε . Повторим, что косвенные методы, удобные в силу своей простоты, не дают полной гарантии достоверности результата.

3. Обратите внимание на то, что ни одно приближенное решение не имеет вторых производных. Однако теорема показывает, что значения приближенного решения на сетке при измельчении шага сходятся к значениям точного решения на той же сетке, а больше ничего на практике и не требуется!

Таким образом, замена уравнения (4.2.1) на "интегральное тождество" (4.5.2) дает возможность использовать при построении приближенного решения недостаточно гладкие, но простые и удобные функции Π_k .

4. Если в исходной задаче на концах промежутка были заданы условия второго рода, все полученные формулы сохраняются, следует лишь положить $\mu_0 = \mu_1 = 0$ и потребовать, чтобы функция q не была нулевой (см. теорему в конце п.4.3).

Если же на концах промежутка заданы условия первого рода, то в (4.5.1) следует брать ϕ также равными нулю на концах промежутка. Таким образом, приближенное решение ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot \Pi_k(x). \quad (4.5.4')$$

Порядок системы (4.5.5) оказывается равным не $N+2$, а N ; коэффициенты системы задаются формулами (4.5.6). Теорема остается верной и в этом случае.