

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Содержательные задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям

В п.1.1 мы построили *дискретные* математические модели двух содержательных задач. Теперь мы будем считать, что состояние динамической системы (напряжение на конденсаторе в задаче 1, координата и скорость тела в задаче 2) можно наблюдать (измерять) в любой момент времени, а не только в узлах временной сетки.

Следуя Фиме Собак¹, введем в обиход еще одно богатое слово – *континуальный*² – и назовем математические модели, которые будут построены в этом пункте, континуальными.

Предполагая напряжение на конденсаторе непрерывно дифференцируемой функцией, перейдем в равенстве

$$\tilde{i}_k = C \cdot \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t}$$

к пределу ($\Delta t = 0$). Получим $i = C \cdot u'$.

Подставляя результат в (1.1.1), найдем

$$u' = -\frac{1}{\tau} \cdot u + \frac{1}{\tau} \cdot E \quad (2.1.1)$$

Здесь, как и раньше, $\tau = RC$.

Аналогично, считая координату и скорость тела в задаче 2 (п.1.1) непрерывно дифференцируемыми функциями, перейдем в равенствах

$$\tilde{v}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \quad \tilde{w}_k = \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t}$$

к пределу ($\Delta t = 0$). Получим $v = x'$, $w = v'$.

Подставляя $w = v'$ во второй закон Ньютона

$$m \cdot w = m \cdot g - a \cdot v - b \cdot x$$

(см.(1.1.4)), придем к системе уравнений

$$\begin{cases} x' &= v \\ v' &= -\frac{b}{m} \cdot x - \frac{a}{m} \cdot v + g. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Если продифференцировать первое из уравнений системы (2.1.2) (для этого нужно повысить требования к гладкости входящих в него функций!) и исключить из второго уравнения скорость, то получим вместо системы *одно* уравнение, но содержащее в отличие от системы *вторую* производную искомой функции:

$$x'' = -\frac{a}{m} \cdot x' - \frac{b}{m} \cdot x + g \quad (2.1.3)$$

2.2. Основные определения

Полученная в п.2.1 континуальная математическая модель задачи о заряде конденсатора (2.1.1) является частным случаем *обыкновенного дифференциального уравнения, первого порядка, линейного, с постоянным коэффициентом*

$$x' = a \cdot x + f. \quad (2.2.1)$$

Здесь

a – заданное число (*коэффициент* уравнения);

f – заданная непрерывная функция (*свободный член* уравнения);

x – искомая функция.

Замечание. Функции, входящие в уравнение (2.2.1), всегда считаются определенными на некотором промежутке. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем считать, что этот промежуток – *сегмент* $[\alpha, \beta]$.

Уравнение (2.2.1) называется

¹Фима Собак – подруга Элочки Шукиной.

²От латинского *continuum* – непрерывное.

дифференциальным, так как содержит производную искомой функции;
обыкновенным – так принято называть дифференциальные уравнения для функций одной переменной (в отличие от уравнений *в частных производных*);
первого порядка, ибо старшая из входящих в него производных – первая;
линейным – так как может быть записано в виде

$$\mathfrak{L}(x) = f,$$

где $\mathfrak{L}(x) = x' - a \cdot x$ – *линейный* (убедитесь в этом!) оператор.

Наконец, это уравнение с *постоянным* коэффициентом – в отличие от линейного уравнения с *переменным* коэффициентом, в котором a не число, а заданная на $[\alpha, \beta]$ непрерывная функция.

Терминологическое замечание. Поскольку в этой главе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения, мы будем опускать слово "обыкновенное" и говорить *дифференциальное уравнение*, а иногда и просто *уравнение*.

Система (2.1.2) есть частный случай системы n линейных уравнений первого порядка с *постоянными* коэффициентами

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1 \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n \end{cases},$$

которая в матричной форме имеет вид

$$x' = A \cdot x + f.$$

Если элементы матрицы A – функции, непрерывные на $[\alpha, \beta]$, получаем систему линейных уравнений первого порядка с *переменными* коэффициентами.

Запишем, наконец, систему *нелинейных* уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x'_1 = \varphi_1(t; x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_n = \varphi_n(t; x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (2.2.2)$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – функции, непрерывные на $[\alpha, \beta] \times \Omega$, а Ω – все пространство \mathbb{R}^n или его часть.

В этой главе мы будем рассматривать *задачу Коши*: найти непрерывно дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции x_1, \dots, x_n , которые в каждой точке сегмента обращают уравнения (2.2.2) в тождества и, кроме того, удовлетворяют *начальным условиям*, заданным в точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$:

$$x_k(t_0) = x_{k0}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Терминологическое замечание. Задачу Коши называют также *начальной задачей* или задачей с начальными условиями (initial value problem). Применительно к теории динамических систем – это задача определения закона движения системы при заданном начальном ее положении.

Обобщая уравнение (2.1.3), запишем линейное уравнение n -го порядка с *постоянными* коэффициентами

$$x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x + f.$$

Если коэффициенты a_0, \dots, a_{n-1} – функции, непрерывные на $[\alpha, \beta]$, получаем линейное уравнение n -го порядка с *переменными* коэффициентами.

Наконец, можно рассматривать *нелинейное* уравнение порядка n

$$x^{(n)} = \varphi(t; x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad (2.2.3)$$

где φ – функция, непрерывная на $[\alpha, \beta] \times \Omega$, а Ω – все пространство \mathbb{R}^n или его часть.

Так же, как в случае разностных уравнений, дифференциальное уравнение порядка n может быть преобразовано в равносильную систему из n уравнений первого порядка.

Действительно, вводя обозначения

$$y_1 = x, \quad y_2 = x' = y'_1, \quad \dots, \quad y_n = x^{(n-1)} = y'_{n-1},$$

получим из уравнения (2.2.3) систему

$$\begin{cases} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ &\dots \\ y'_n &= \varphi(t; y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Однако обратный переход не всегда возможен. Покажем это на простейшем примере. Пусть дана система двух линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2 \end{cases},$$

где f_1 и f_2 — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции. Попытка исключить из этой системы искомую функцию x_2 приведет к необходимости дифференцирования одного из уравнений. Но свободный член этого уравнения по условию лишь непрерывен и может оказаться недифференцируемым!

Мы обращаем на это обстоятельство внимание читателя, так как в курсах по теории линейных электрических цепей с постоянными параметрами зачастую сводят системы уравнений первого порядка к уравнению высокого порядка, дифференцируя для этого *недифференцируемые функции*. При этом возникают так называемые *обобщенные функции* — δ -функция и ее производные. Использование аппарата обобщенных функций требует уровня математической подготовки, недостижимого в технических университетах.

Более того, матричная техника делает процесс решения системы уравнений не более сложным, чем решение одного уравнения. Поэтому сведение системы к одному уравнению нецелесообразно даже в случае, когда возможно.

2.3. Линейное уравнение первого порядка с постоянным коэффициентом

Требуется найти непрерывно дифференцируемую функцию $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, которая:

1) является решением уравнения (2.2.1), т.е.

$$x'(t) \equiv a \cdot x(t) + f(t), \quad t \in [\alpha, \beta];$$

2) удовлетворяет *начальному условию*, т.е. $x(t_0) = x_0$.

Начнем с рассмотрения случая, когда $f(t) \equiv 0$ (*однородное* уравнение, соответствующее уравнению (2.2.1)).

Во избежание путаницы обозначим теперь искомую функцию другой буквой. Итак, рассмотрим задачу Коши

$$z' = a \cdot z; \quad z(t_0) = z_0. \quad (2.3.1)$$

Докажем, что эта задача имеет решение. Действительно, подставляя функцию

$$z(t) = \exp(a(t - t_0)) \cdot z_0 \quad (2.3.2)$$

в (2.3.1), убеждаемся, что она является решением задачи Коши на любом сегменте, содержащем точку t_0 .

Докажем теперь, что найденное решение задачи Коши единственно. Пусть $z(t) = \exp(a(t - t_0)) \cdot z_0$, а w — *какое-нибудь* решение *той же* задачи Коши, т.е.

$$w' = a \cdot w; \quad w(t_0) = z_0. \quad (2.3.3)$$

Введем функцию $u(t) = \exp(-a(t - t_0)) \cdot w(t)$. Тогда, очевидно, $w(t) = \exp(a(t - t_0)) \cdot u(t)$. Подставим это выражение в (2.3.3):

$$\begin{aligned} \exp(a(t - t_0)) \cdot u'(t) + a \cdot \exp(a(t - t_0)) \cdot u(t) &\equiv \\ &\equiv a \cdot \exp(a(t - t_0)) \cdot u(t); \quad u(t_0) = z_0. \end{aligned}$$

Отсюда $\exp(a(t - t_0)) \cdot u'(t) \equiv 0$, а так как экспонента в нуль не обращается, получаем, что $u'(t) \equiv 0$. Тогда $u(t) = \text{const}$, и с учетом $u(t_0) = z_0$ имеем $u(t) \equiv z_0$. Следовательно, $w(t) \equiv z(t)$.

Нами доказана

Теорема. Задача Коши для линейного однородного уравнения первого порядка с постоянным коэффициентом:

$$z' = a \cdot z; \quad z(t_0) = z_0,$$

где a, t_0, z_0 – произвольные вещественные числа, имеет на \mathbb{R} единственное решение, которое задается формулой

$$z(t) = \exp(a(t - t_0)) \cdot z_0.$$

Отметим также одно важное

Следствие. Функция, удовлетворяющая уравнению $z' = a \cdot z$ на промежутке, либо не обращается в нуль ни в одной точке этого промежутка, либо равна на нем нулю тождественно.

Перейдем теперь к задаче Коши для неоднородного уравнения:

$$x' = a \cdot x + f; \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.3.4)$$

Ее решение будем искать в виде

$$x(t) = \exp(a(t - t_0)) \cdot v(t), \quad (2.3.5)$$

где v – новая искомая функция (сравните (2.3.5) с (2.3.2): константа z_0 заменена на функцию v , поэтому рассматриваемый метод называется методом *вариации постоянной*).

Подставляя (2.3.5) в (2.3.4), получаем

$$\begin{aligned} \exp(a(t - t_0)) \cdot v'(t) + a \cdot \exp(a(t - t_0)) \cdot v(t) &= \\ &= a \cdot \exp(a(t - t_0)) \cdot v(t) + f(t); \quad v(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $v'(t) = \exp(-a(t - t_0)) \cdot f(t)$, и интегрируя последнее равенство, получаем

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t \exp(-a(\gamma - t_0)) \cdot f(\gamma) d\gamma.$$

Учитывая, что $v(t_0) = x_0$, и подставляя результат в (2.3.5), получим после несложных преобразований

$$x(t) = \exp(a(t - t_0)) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t \exp(a(t - \gamma)) \cdot f(\gamma) d\gamma. \quad (2.3.6)$$

Покажем теперь, что это *единственное* решение задачи Коши. Пусть x – функция, заданная формулой (2.3.6), а w – какое-нибудь решение той же задачи Коши, т.е.

$$w' = a \cdot w + f; \quad w(t_0) = x_0.$$

Тогда разность двух решений задачи Коши удовлетворяет однородному уравнению $(x - w)' = a \cdot (x - w)$ и в одной точке эта разность обращается в нуль: $(x - w)(t_0) = 0$. По следствию из доказанной выше теоремы эта разность равна нулю *тождественно*.

Таким образом, доказана

Теорема. Задача Коши

$$x' = a \cdot x + f; \quad x(t_0) = x_0,$$

где f – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, $t_0 \in [\alpha, \beta]$, x_0 – произвольное вещественное число, имеет единственное решение, которое задается на $[\alpha, \beta]$ формулой (2.3.6).

Пример. В п.2.1 было выведено дифференциальное уравнение (2.1.1), описывающее закон изменения напряжения на конденсаторе при зарядке последнего от источника постоянной электродвижущей силы. Добавив начальное условие $u(0) = U$, получим задачу Коши:

$$u' = -\frac{1}{\tau} \cdot u + \frac{1}{\tau} \cdot E; \quad u(0) = U \quad (U < E).$$

Ее решение дается формулой (2.3.6) при $a = -\frac{1}{\tau}$, $f(t) = \frac{E}{\tau}$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot U + \frac{E}{\tau} \cdot \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\gamma}{\tau}\right) d\gamma = \\ &= \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot U + \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \cdot E. \end{aligned}$$

Замечания. 1. Метод вариации постоянной называют также методом Лагранжа.

2. Как видно из формулы (2.3.6), решение линейного уравнения есть сумма двух слагаемых:

$\exp(a(t - t_0)) \cdot x_0$ представляет собой изменение состояния линейной динамической системы за счет начального запаса энергии в этой системе (ненулевое начальное условие);

$\int_{t_0}^t \exp(a(t - \gamma)) \cdot f(\gamma) d\gamma$ есть изменение состояния линейной динамической системы за счет внешнего воздействия на эту систему (свободного члена уравнения).

3. В приложениях часто встречаются задачи вида (2.3.4), в которых f – не непрерывная, а лишь кусочно непрерывная на сегменте функция. В этом случае уравнение не может, конечно, выполняться в точках разрыва функции f .

Вспомним определение первообразной для кусочно непрерывной функции f : это кусочно гладкая, непрерывная функция, производная которой совпадает с f в точках непрерывности f . По аналогии, решением уравнения (2.3.4) с кусочно непрерывным свободным членом f назовем кусочно гладкую непрерывную функцию, удовлетворяющую этому уравнению во всех точках непрерывности f . Иначе можно сказать, что решение должно быть первообразной от правой части уравнения (2.3.4).

Задачу (2.3.4) с кусочно непрерывным свободным членом можно решать "по кускам". Поясним это на примере.

Пусть $t_0 = \alpha$, и функция f на $[\alpha, \beta]$ имеет единственную точку разрыва λ . Тогда определим решение на $[\alpha, \lambda]$ по формуле (2.3.6), а затем решим новую задачу Коши на $[\lambda, \beta]$, считая полученное на первом шаге значение $x(\lambda)$ новым начальным условием. Если точек разрыва больше одной, эту операцию нужно применить несколько раз.

Однако несложно видеть (проверьте это!), что при этом во всех точках промежутка $[\alpha, \beta]$ решение $x(t)$ будет задаваться формулой (2.3.6). Поэтому доказанная теорема справедлива и для уравнения с кусочно непрерывным на $[\alpha, \beta]$ свободным членом.

4. Формула (2.3.6) содержит интеграл. Таким образом, она является как бы "полуфабрикатом" решения: мы свели проблему отыскания решения задачи Коши к проблеме вычисления интеграла (которая, как известно, далеко не всегда проста).

2.4. Система линейных уравнений первого порядка с постоянной матрицей

Пусть заданы n непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций f_1, \dots, f_n , числовая $n \times n$ -матрица A , n чисел $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ и точка $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Запишем задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянной матрицей

$$x' = A \cdot x + f; \quad x(t_0) = x^{(0)}. \quad (2.4.1)$$

Здесь $f = [f_1 \dots f_n]^T$; $x^{(0)} = [x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}]^T$; $x = [x_1 \dots x_n]^T$ – искомая вектор-функция.

Как и в предыдущем пункте, начнем с рассмотрения задачи Коши для *однородной* системы

$$z' = A \cdot z; \quad z(t_0) = z^{(0)}. \quad (2.4.2)$$

Докажем, что вектор-функция

$$z(t) = \exp(A(t - t_0)) \cdot z^{(0)} \quad (2.4.3)$$

– решение задачи (2.4.2).

Действительно, полагая $t = t_0$, убеждаемся, что z удовлетворяет начальному условию. Далее, дифференцируя ряд, задающий матричную экспоненту, получаем

$$\begin{aligned} (\exp(At))' &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{A^k t^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k A^k t^{k-1}}{k!} = \\ &= A \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j t^j}{j!} = A \cdot \exp(At), \end{aligned}$$

откуда

$$z'(t) = \left(\exp(A(t - t_0)) \right)' \cdot z^{(0)} = A \cdot \exp(A(t - t_0)) \cdot z^{(0)} = A \cdot z(t).$$

Докажем теперь, что найденное решение задачи Коши единственно. Пусть $z(t) = \exp(A(t - t_0)) \cdot z^{(0)}$, а w – какое-нибудь решение той же задачи Коши, т.е.

$$w' = A \cdot w; \quad w(t_0) = z^{(0)}. \quad (2.4.4)$$

Введем вектор-функцию $u(t) = \exp(-A(t - t_0)) \cdot w(t)$. Тогда по свойству матричной экспоненты $w(t) = \exp(A(t - t_0)) \cdot u(t)$. Подставим это выражение в (2.4.4):

$$\begin{aligned} \exp(A(t - t_0)) \cdot u'(t) + A \cdot \exp(A(t - t_0)) \cdot u(t) &\equiv \\ &\equiv A \cdot \exp(A(t - t_0)) \cdot u(t); \quad u(t_0) = z^{(0)}. \end{aligned}$$

Отсюда $\exp(A(t - t_0)) \cdot u'(t) \equiv \theta_n$, а так как экспонента – обратимая матрица, получаем, что $u'(t) \equiv \theta_n$. С учетом начального условия имеем $u(t) \equiv z^{(0)}$. Следовательно, $w(t) \equiv z(t)$.

Замечания. 1. Обратите внимание, что эти рассуждения почти дословно повторяют доказательство аналогичных утверждений из п.2.3.

2. Из формулы (2.4.3) видно, что множество *всех* решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей есть n -мерное линейное пространство.

Перейдем теперь к задаче Коши для неоднородной системы. Имеет место

Теорема. Задача Коши (2.4.1) для системы линейных уравнений первого порядка с постоянной матрицей имеет единственное решение. Это решение дается формулой

$$x(t) = \exp(A \cdot (t - t_0)) \cdot x^{(0)} + \int_{t_0}^t \exp(A \cdot (t - \gamma)) \cdot f(\gamma) d\gamma. \quad (2.4.5)$$

Мы не приводим доказательство этой теоремы, так как оно состоит в почти дословном повторении доказательства аналогичной теоремы из предыдущего пункта (с учетом свойств матричной экспоненты).

Замечания. 1. Нетрудно убедиться, что формула (2.3.6) есть частный случай формулы (2.4.5).

2. Остается в силе замечание 2 из п.2.3: решение *линейной* системы дифференциальных уравнений (изменение состояния *линейной* динамической системы) есть сумма двух слагаемых. Первое представляет собой изменение состояния динамической системы за счет начального запаса энергии. Второе является реакцией на внешнее воздействие.

3. Аналогично замечанию 3 из п.2.3 определяется решение задачи (2.4.1) в случае, когда f – вектор-функция с кусочно непрерывными на $[\alpha, \beta]$ компонентами. Формула (2.4.5), так же как и теорема существования и единственности решения, остается справедливой и в этой ситуации.

4. К уже отмеченной в замечании 4 из п.2.3 проблеме вычисления интеграла добавляется теперь не менее сложная проблема построения матричной экспоненты.

2.5. Решение линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа

В приложениях часто встречается случай, когда начальное условие задают в точке $t_0 = 0$, свободный член является оригиналом, а решение задачи Коши

$$x' = A \cdot x + f; \quad x(0) = x^{(0)} \quad (2.5.1)$$

ищут на промежутке $[0, +\infty[$. В этом случае решение задается формулой (2.4.5) при $t \geq 0$. Если положить $x(t) = 0$ при $t < 0$, то можно записать

$$x(t) = \left(\exp(At) \cdot x^{(0)} + \int_0^t \exp(A \cdot (t - \gamma)) \cdot f(\gamma) d\gamma \right) \cdot \delta_1(t). \quad (2.5.2)$$

Здесь δ_1 – функция Хевисайда.

Заметим, что интеграл в (2.5.2) представляет собой свертку матрицы-функции $\exp(At) \cdot \delta_1(t)$ со свободным членом системы (2.5.1). Из свойств матричной экспоненты следует экспоненциальная ограниченность элементов матрицы $\exp(At)$. Поэтому $\exp(At) \cdot \delta_1(t)$ – оригинал. Далее, свертка оригиналов и сумма оригиналов –

оригиналы. Следовательно, функция x , заданная формулой (2.5.2), является оригиналом. Поэтому функция $x' = A \cdot x + f$ также оригинал.

Применив к обеим частям системы (2.5.1) преобразование Лапласа (покомпонентно), имеем

$$s \cdot \tilde{x}(s) - x^{(0)} = A \cdot \tilde{x}(s) + \tilde{f}(s). \quad (2.5.3)$$

Решая эту систему *линейных алгебраических уравнений*, получим *изображение* решения

$$\tilde{x}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot (\tilde{f}(s) + x^{(0)}). \quad (2.5.4)$$

Из формул Крамера следует, что элементы матрицы $(sI - A)^{-1}$ – это рациональные дроби, числители которых – алгебраические дополнения элементов матрицы $(sI - A)$, т.е. полиномы *порядка n* , а общий знаменатель – определитель этой матрицы, т.е. полином *степени n* . Поэтому все элементы матрицы $(sI - A)^{-1}$ – *правильные* рациональные дроби, полюсы которых – собственные числа матрицы A .

В часто встречающемся случае, когда изображения компонент вектора свободных членов – также правильные рациональные дроби, элементы вектора $\tilde{x}(s)$ оказываются правильными рациональными дробями, оригиналы которых находятся известным способом.

Пример. Решим задачу Коши для системы (2.1.2):

$$\begin{cases} x' &= v \\ v' &= -\frac{b}{m} \cdot x - \frac{a}{m} \cdot v + g \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ (заданы начальная координата и начальная скорость груза).

Выполним преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} s \cdot \tilde{x} - x_0 &= \tilde{v} \\ s \cdot \tilde{v} - v_0 &= -\frac{b}{m} \cdot \tilde{x} - \frac{a}{m} \cdot \tilde{v} + \frac{g}{s}, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{b}{m} & s + \frac{a}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 + \frac{g}{s} \end{bmatrix}.$$

Решив эту систему, найдем изображения компонент вектора-решения задачи Коши:

$$\tilde{x} = \frac{x_0 \cdot s^2 + \left(\frac{a}{m} \cdot x_0 + v_0\right) \cdot s + g}{s \cdot \left(s^2 + \frac{a}{m} \cdot s + \frac{b}{m}\right)}; \quad \tilde{v} = \frac{v_0 \cdot s + g - \frac{b}{m} \cdot x_0}{s^2 + \frac{a}{m} \cdot s + \frac{b}{m}}.$$

Если корни квадратного трехчлена $s^2 + \frac{a}{m} \cdot s + \frac{b}{m}$ различны, то, обозначив их s_1 и s_2 , получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{g}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(\left(\left(s_1 + \frac{a}{m} \right) \cdot x_0 + v_0 + \frac{g}{s_1} \right) \cdot \exp(s_1 t) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(s_2 + \frac{a}{m} \right) \cdot x_0 + v_0 + \frac{g}{s_2} \right) \cdot \exp(s_2 t) \right) \\ v(t) &= \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \left(\left(\frac{b}{m} \cdot x_0 - s_1 \cdot v_0 - g \right) \cdot \exp(s_1 t) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b}{m} \cdot x_0 - s_2 \cdot v_0 - g \right) \cdot \exp(s_2 t) \right). \end{aligned}$$

Если корни квадратного трехчлена совпадают: $s_1 = s_2 = -\frac{a}{2m}$, то

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4m^2}{a^2} \cdot g + \\ &+ \left(\left(x_0 - \frac{4m^2}{a^2} \cdot g \right) + \left(v_0 + \frac{a}{2m} \cdot x_0 - \frac{2m}{a} \cdot g \right) \cdot t \right) \cdot \exp\left(-\frac{a}{2m} t\right); \end{aligned}$$

$$v(t) = \left(v_0 + \left(g - \frac{a}{2m} \cdot v_0 - \frac{a^2}{4m^2} \cdot x_0 \right) \cdot t \right) \cdot \exp \left(-\frac{a}{2m} t \right).$$

Замечания. 1. Мы сознательно опустили множитель $\delta_1(t)$, ибо полученные функции являются решениями системы (2.1.2) *при всех* $t \in \mathbb{R}$.

2. Описанный алгоритм может применяться для построения матричной экспоненты как решения матричной задачи Коши

$$X' = A \cdot X; \quad X(0) = I_n,$$

где I_n – единичная матрица.

3. Если компоненты изображения свободного члена не являются правильными рациональными дробями, то можно попытаться восстановить решение по полученному изображению с помощью достаточно богатых таблиц, содержащихся в распространенных справочниках (например, Г. Деч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Физматгиз, 1960). Если эта попытка не приведет к успеху, то целесообразно обратиться к численным методам решения задачи Коши.

2.6. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Пусть f_0 – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция; a_0, \dots, a_{n-1} – заданные числа. Рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x + f_0. \quad (2.6.1)$$

Здесь x – искомая n раз непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция.

Введем следующие обозначения:

$$y_1 = x; y_2 = y_1' = x'; \dots y_n = y_{n-1}' = x^{(n-1)}.$$

Тогда уравнение (2.6.1) перепишется в виде системы уравнений первого порядка

$$y' = A \cdot y + f, \quad (2.6.2)$$

где

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T = [x, x', \dots, x^{(n-1)}]^T, \quad f = [0, 0, \dots, f_0]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, если y – решение системы (2.6.2), то компонента y_n непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$. Из предпоследнего уравнения системы видно, что y_{n-1} дважды непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, и т.д. Наконец, компонента y_1 n раз непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (2.6.1). Таким образом, система (2.6.2) равносильна уравнению (2.6.1).

В задаче Коши для системы (2.6.2) требуется задание начального вектора в некоторой точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$:

$$y(t_0) = y^{(0)} = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]^T = [x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}]^T.$$

Теперь мы можем сформулировать задачу Коши для линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами: найти n раз непрерывно дифференцируемую на $[\alpha, \beta]$ функцию x , которая является решением уравнения (2.6.1), т.е.

$$x^{(n)}(t) \equiv a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) + f(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

и удовлетворяет начальным условиям, т.е.

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

где $x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Поскольку эта задача Коши равносильна задаче Коши для системы уравнений первого порядка, ее решение существует и единственно.

На практике уравнения высших порядков иногда не сводят к системе, а решают непосредственно. Для иллюстрации рассмотрим

Пример. Решим задачу Коши для уравнения (2.1.3):

$$x'' = -\frac{a}{m} \cdot x' - \frac{b}{m} \cdot x + g$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$ и $x'(0) = v_0$ (заданы начальная координата и начальная скорость груза).

Применим преобразование Лапласа. Поскольку

$$\mathcal{L}(x') = s \cdot \tilde{x} - x_0; \quad \mathcal{L}(x'') = s^2 \cdot \tilde{x} - s \cdot x_0 - v_0,$$

то

$$s^2 \cdot \tilde{x} - s \cdot x_0 - v_0 = -\frac{a}{m} \cdot (s \cdot \tilde{x} - x_0) - \frac{b}{m} \cdot \tilde{x} + \frac{g}{s}.$$

Решив это уравнение, найдем

$$\tilde{x} = \frac{x_0 \cdot s^2 + \left(\frac{a}{m} \cdot x_0 + v_0\right) \cdot s + g}{s \cdot \left(s^2 + \frac{a}{m} \cdot s + \frac{b}{m}\right)}.$$

Оригинал этого изображения был получен в примере п.2.5.

Замечание. Если f_0 – кусочно непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, то решение уравнения (2.6.1) следует понимать как функцию, у которой $(n-1)$ -я производная совпадает с одной из первообразных правой части (2.6.1). Таким образом, решение в этом случае $n-1$ раз непрерывно дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$, а его $(n-1)$ -я производная является кусочно гладкой, и уравнение выполняется почти всюду на $[\alpha, \beta]$.

2.7. Линейное уравнение первого порядка с переменным коэффициентом

Пусть заданы две непрерывные функции $a, f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Уравнение

$$x' = a(t) \cdot x + f(t) \tag{2.7.1}$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка с *переменным* коэффициентом $a(t)$. Поставив начальное условие $x(t_0) = x_0$; $t_0 \in [\alpha, \beta]$, получим задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую на $[\alpha, \beta]$ функцию x , которая удовлетворяет уравнению (2.7.1), т.е.

$$x'(t) \equiv a(t) \cdot x(t) + f(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

а также удовлетворяет начальному условию.

Теорема. Задача Коши, сформулированная выше, имеет решение, и это решение единственно.

Доказательство. Вначале рассмотрим задачу Коши для соответствующего *однородного* уравнения

$$z' = a(t) \cdot z; \quad z(t_0) = z_0.$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$z(t) = \exp(w(t)) \cdot z_0,$$

где w – новая искомая функция. Подставляя $z(t)$ в уравнение, получим $\exp(w(t)) \cdot w'(t) = a(t) \cdot \exp(w(t))$. Сокращая на $\exp(w(t)) \neq 0$, получаем $w'(t) = a(t)$. Из начального условия $z(t_0) = \exp(w(t_0)) \cdot z_0 = z_0$ найдем $w(t_0) = 0$. Поэтому $w(t) = \int_{t_0}^t a(\gamma) d\gamma$. Итак,

$$z(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\gamma) d\gamma\right) \cdot z_0.$$

Далее применяем уже известный метод Лагранжа: ищем решение задачи Коши для неоднородного уравнения в виде

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\gamma) d\gamma\right) \cdot u(t). \tag{2.7.2}$$

Подставляя (2.7.2) в уравнение (2.7.1), получим

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_{t_0}^t a(\gamma)d\gamma\right) \cdot a(t) \cdot u(t) + \exp\left(\int_{t_0}^t a(\gamma)d\gamma\right) \cdot u'(t) = \\ = a(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(\gamma)d\gamma\right) \cdot u(t) + f(t) \end{aligned}$$

Отсюда $u'(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\gamma)d\gamma\right) \cdot f(t)$. Интегрируя, получаем

$$u(t) - x_0 = \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^{\omega} a(\gamma)d\gamma\right) \cdot f(\omega)d\omega.$$

Подстановка результата в (2.7.2) дает

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\gamma)d\gamma\right) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{\omega}^t a(\gamma)d\gamma\right) \cdot f(\omega)d\omega. \quad (2.7.3)$$

Единственность этого решения может быть доказана методом, аналогичным использованному в п.2.3.

Замечания. 1. Использовать формулу (2.7.3) для практических вычислений удастся чрезвычайно редко, так как входящие в нее два интеграла обычно через табулированные функции не выражаются.

2. Из (2.7.3) видно, что решение задачи Коши (2.7.1) представляет собой сумму двух слагаемых: изменения состояния линейной динамической системы за счет начального запаса энергии в ней (ненулевое начальное условие) и реакции на внешнее воздействие (свободный член уравнения).

3. Формула (2.7.3) верна и в случае, когда коэффициент a и свободный член f – кусочно непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции.

2.8. Система линейных уравнений первого порядка с переменной матрицей

Пусть A – квадратная матрица порядка n , элементы которой – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции; $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$ – заданный числовой столбец; $f = [f_1, \dots, f_n]^T$ – вектор-функция, непрерывная на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$x' = A(t) \cdot x + f(t); \quad x(t_0) = x^{(0)}. \quad (2.8.1)$$

Существование и единственность решения этой задачи Коши следует из теоремы, доказательство которой мы опускаем:

Теорема. Для всякой непрерывной на $[\alpha, \beta]$ матрицы-функции $A(t)$ и всякого $t_0 \in [\alpha, \beta]$ существует единственная непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ матрица-функция $W(t, t_0)$, обладающая следующими свойствами:

1. $D_t W(t, t_0) = A(t) \cdot W(t, t_0)$;
2. $W(t_0, t_0) = I$;
3. $\det(W(t, t_0)) \neq 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$;
4. для любых трех точек t_1, t_2, t_3 на $[\alpha, \beta]$

$$W(t_1, t_3) = W(t_1, t_2) \cdot W(t_2, t_3).$$

Матрицу W называют *фундаментальной матрицей однородной системы* $z' = A(t) \cdot z$.

Замечание. Если A – *постоянная* матрица, то нетрудно убедиться, что $W(t, t_0) = \exp(A \cdot (t - t_0))$. К сожалению, в общем случае не существует *не численного* алгоритма построения фундаментальной матрицы.

Решение задачи Коши для однородной системы

$$z' = A(t) \cdot z; \quad z(t_0) = z^{(0)}$$

имеет вид $z(t) = W(t, t_0) \cdot z^{(0)}$ (убедиться в этом можно, подставив $z(t)$ в систему с учетом свойств W).

Отсюда, как и в случае системы с постоянной матрицей, можно видеть, что множество *всех* решений однородной системы есть n -мерное линейное пространство.

Решение задачи Коши для неоднородной системы можно найти уже известным методом Лагранжа. Оно имеет вид

$$x(t) = W(t, t_0) \cdot x^{(0)} + \int_{t_0}^t W(t, \gamma) \cdot f(\gamma) d\gamma. \quad (2.8.2)$$

Легко видеть, что (2.4.5) – частный случай (2.8.2).

Отметим еще раз, что решения задач Коши для всех рассмотренных типов *линейных* дифференциальных уравнений представляются в виде суммы двух слагаемых: изменения состояния линейной динамической системы за счет начального запаса энергии в ней (ненулевое начальное условие) и реакции на внешнее воздействие (свободный член уравнения).

2.9. Линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами

Иногда формализация прикладной задачи естественным образом приводит к задаче Коши для линейного уравнения порядка $n > 1$:

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x + f(t);$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}.$$

Так же, как в п.2.6, можно показать, что эта задача Коши эквивалентна задаче Коши для системы уравнений первого порядка и, следовательно, для нее справедлива сформулированная теорема существования и единственности решения.

Какие-либо общие *формальные* методы решения этой задачи отсутствуют. Поэтому мы рассмотрим лишь *метод степенных рядов*, пригодный для линейных уравнений, коэффициенты и свободный член которых *аналитичны* в окрестности начальной точки (напомним, что для существования и единственности решения задачи Коши достаточно лишь непрерывности коэффициентов и свободного члена). Можно показать, что имеет место

Теорема. Если коэффициенты и свободный член уравнения аналитичны при $|t - t_0| < R$, то и решение аналитично на этом интервале.

Изложение метода проведем на примере задачи Коши для уравнения второго порядка

$$x'' = p(t) \cdot x' + q(t) \cdot x + f(t); \quad x(t_0) = \alpha; \quad x'(t_0) = \beta.$$

Пусть

$$p(t) = p_0 + p_1(t - t_0) + \dots + p_n(t - t_0)^n + \dots;$$

$$q(t) = q_0 + q_1(t - t_0) + \dots + q_n(t - t_0)^n + \dots;$$

$$f(t) = f_0 + f_1(t - t_0) + \dots + f_n(t - t_0)^n + \dots,$$

и все эти ряды сходятся при $|t - t_0| < R$. Обозначим $\tau = t - t_0$ и будем искать решение задачи Коши в виде ряда

$$x(t) = x_0 + x_1\tau + \dots + x_n\tau^n + \dots$$

(т.е. будем искать числа $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ – коэффициенты этого ряда). Дифференцируя дважды ряд-решение и подставляя все ряды в уравнение, получим тождество:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot x_2 + 2 \cdot 3 \cdot x_3\tau + \dots + (n-1) \cdot n \cdot x_n \cdot \tau^{n-2} + \dots \equiv \\ & \equiv (p_0 + p_1\tau + \dots + p_n\tau^n + \dots) \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2\tau + \dots + n \cdot x_n\tau^{n-1} + \dots) + \\ & + (q_0 + q_1\tau + \dots + q_n\tau^n + \dots) \cdot (x_0 + x_1\tau + \dots + x_n\tau^n + \dots) + \\ & + f_0 + f_1\tau + \dots + f_n\tau^n + \dots \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ в обеих частях этого тождества, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов ряда-решения:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot x_2 &= p_0x_1 + q_0x_0 + f_0; \\ 2 \cdot 3 \cdot x_3 &= 2p_0x_2 + p_1x_1 + q_0x_1 + q_1x_0 + f_1; \\ &\dots \\ (n-1) \cdot n \cdot x_n &= (n-1)p_0x_{n-1} + \dots + p_{n-2}x_1 + \\ &+ q_0x_{n-2} + \dots + q_{n-2}x_0 + f_{n-2}. \\ &\dots \end{aligned}$$

Из начальных условий находим:

$$x_0 = x(t_0) = \alpha; \quad x_1 = x'(t_0) = \beta.$$

Первое уравнение системы дает возможность определить x_2 , второе – x_3 и т.д. (обратите внимание на то, что уравнение для x_n содержит в правой части только уже известные числа x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).

2.10. Нелинейные дифференциальные уравнения

В предыдущих пунктах была рассмотрена задача Коши для наиболее часто встречающихся в приложениях *линейных* уравнений с *постоянными* коэффициентами и систем таких уравнений. Были также приведены основные сведения о задаче Коши для *линейных* уравнений с *переменными коэффициентами*. Сейчас мы рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка общего вида

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0.$$

Здесь f – *непрерывная* вещественная функция двух переменных, заданная на прямоугольнике $[\alpha, \beta] \times]c, d[$, $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $x_0 \in]c, d[$.

Отметим геометрическую интерпретацию такого дифференциального уравнения: оно связывает координаты точки на плоскости (t, x) с угловым коэффициентом касательной, проведенной в этой точке к графику решения уравнения. Этот график обычно называют *интегральной кривой* уравнения. Таким образом, уравнение задает *поле направлений* своих интегральных кривых.

Пользуясь введенной терминологией, задачу Коши можно сформулировать так: найти интегральную кривую уравнения, проходящую через заданную точку плоскости.

Имеет место

Теорема. 1. Через каждую точку прямоугольника, на котором непрерывна функция f , проходит *хотя бы одна* интегральная кривая уравнения $x' = f(t, x)$.

2. Если на этом прямоугольнике непрерывна и частная производная $D_x f$, то через каждую его точку проходит *ровно одна* интегральная кривая этого уравнения.

При разрывной производной $D_x f$ задача Коши может иметь более одного решения. Так, например, задача Коши

$$x' = 2\sqrt{x}, \quad x(0) = 0$$

имеет два решения на $[0, +\infty[$: $x_1(t) \equiv 0$ и $x_2(t) = t^2$ (через начало координат проходят *две* интегральные кривые).

Как сказал классик русской литературы, все *линейные* уравнения линейны одинаково, но всякое *нелинейное* уравнение нелинейно по-своему. Поэтому не существует каких-либо общих *формальных* ("формульных") методов решения задачи Коши. Мы ограничимся рассмотрением одного часто встречающегося случая – так называемого уравнения с разделенными переменными:

$$x' = R(t) \cdot Q(x).$$

Предполагая, что Q не обращается в нуль на $]c, d[$, преобразуем уравнение к виду

$$\frac{x'}{Q(x)} = R(t).$$

Интегрируя это равенство по промежутку $[t_0, t]$, получим

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(\tau) d\tau}{Q(x(\tau))} = \int_{t_0}^t R(\tau) d\tau.$$

Сделав в левом интеграле подстановку $x(\tau) = y$, получим

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dy}{Q(y)} = \int_{t_0}^t R(\tau) d\tau.$$

Пусть W – первообразная для R , а S – первообразная для $1/Q$. Тогда

$$S(x(t)) - S(x_0) = W(t) - W(t_0). \quad (2.10.1)$$

Итак, для "аналитического" (формального) решения задачи Коши необходимо:

- 1) найти первообразные для функций R и $1/Q$;
- 2) разрешить уравнение (2.10.1) относительно переменной x .

Очевидно, что успех может быть достигнут лишь в исключительных случаях.

2.11. Численные методы решения задачи Коши

До конца XIX века усилия разработчиков теории обыкновенных дифференциальных уравнений были направлены в основном на поиск решений отдельных типов уравнений в классе так называемых квадратур, т.е. "элементарных" ("школьных") функций, их первообразных и композиций. Нередко вводились новые, так называемые "специальные" функции, к которым относят некоторые первообразные от "элементарных" функций (с примерами их вы познакомились в курсе математического анализа), а также решения некоторых дифференциальных уравнений, важных для приложений (например, функции Бесселя – решения уравнения Бесселя). Свойства этих функций хорошо изучены, были построены подробные таблицы их значений.

Этот путь был, по-видимому, единственным возможным для практических приложений в отсутствие эффективных вычислительных средств. С появлением ЭВМ постепенно утратили свое значение таблицы – их заменили компьютерные программы (конечно, не следует забывать, что создание этих программ стало возможным только благодаря информации о специальных функциях, накопленной в докомпьютерную эпоху!). Затем были разработаны эффективные программы, реализующие численные методы решения задачи Коши для широкого класса дифференциальных уравнений. Если добавить к этому имеющиеся ныне возможности графического представления полученных численными методами решений, то станет ясной бессмысленность попыток заставить будущего *пользователя* выучить "методы" решения большого количества *частных* видов задачи Коши. Достаточно адресовать его к справочникам (например, Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям³. – М.: Наука, 1971) или к одной из сред конечного пользователя (например, DERIVE,

³Эта работа содержит решения около 1650 уравнений.

МАТНЕМАТИСА, MAPLE), которые умеют решать все типы уравнений, до сих пор заполняющие учебники математики для ВТУЗов.

Заметим еще, что даже в случае, когда уравнение содержится в справочнике, от полученного формального решения толку может оказаться немного. Например, уравнение с разделенными переменными допускает формальное решение, но задача Коши при этом фактически „передается в другой цех“, – сводится к задаче построения двух первообразных, в общем случае неалгоритмизируемой.

В этом пункте мы рассмотрим некоторые алгоритмы построения приближенного решения задачи Коши.

Серьезное предупреждение. Перед применением любого численного метода необходимо ответить на два вопроса:

1. Существует ли решение данной задачи Коши?
2. Если существует, то единственно ли оно?

Имеется целый ряд теорем, которые отвечают на эти вопросы. Одна из них приведена в предыдущем пункте.

Заметим, что эта теорема гарантирует существование решения задачи Коши *лишь в некоторой окрестности начальной точки*.

Пример. В задаче Коши $x' = 1 + x^2$; $x(0) = 0$ функция $f(t, x) \equiv 1 + x^2$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши на всей плоскости, т.е. через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая. Нетрудно убедиться, что через начало координат проходит график решения $x = tg(t)$, которое определено только на $] -\pi/2, \pi/2[$ и не может быть продолжено на больший промежуток.

Вопрос о существовании решения на заданном промежутке непросто. Не имея возможности остановиться на нем подробно, отметим лишь, что для *линейных* уравнений и систем эта проблема не возникает – их решение всегда определено на том же промежутке, на котором определены коэффициенты и свободный член.

Построение численного решения задачи Коши начинается с того, что на сегменте $[t_0, t_n = T]$ задается сетка $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. Далее вычисляются значения приближенного решения на этой сетке x_1, x_2, \dots, x_n .

Определение. *Погрешностью метода* называется число

$$\max_k (|x_k - x(t_k)|), \quad k = 1, \dots, n.$$

Мы рассмотрим два наиболее простых численных метода решения задачи Коши: метод Эйлера и метод "прогноз-коррекция".

Метод Эйлера

Решается задача Коши

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0.$$

В точке (t_0, x_0) (рис.2.1), лежащей на интересующей нас интегральной кривой, известна касательная к этой кривой, так как ее угловой коэффициент равен $f(t_0, x_0)$. Идея метода Эйлера состоит в замене движения по *неизвестной* интегральной кривой (1 на рис.2.1) движением по *известной* касательной к этой кривой. Сделав один шаг, мы перейдем в точку с координатами (t_1, x_1) , где t_1 задано, а $x_1 = x_0 + f(t_0, x_0) \cdot (t_1 - t_0)$.

Второй шаг метода Эйлера отличается от первого тем, что движение происходит по касательной к интегральной кривой (2 на рис.2.1), проходящей через точку (t_1, x_1) (следует помнить, что это уже *другая интегральная кривая!*). Последующие шаги аналогичны второму. Таким образом искомая интегральная кривая заменяется ломаной (3 на рис.2.1) – она называется *ломаной Эйлера*.

Оценим погрешность метода Эйлера для случая равномерной сетки. Обозначим начальную абсциссу t_0 , конечную $t_n = T$, а шаг сетки – $h = \frac{T - t_0}{n}$.

Теорема. Если как график решения $x(t)$, так и построенные по методу Эйлера точки $(t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)$ не выходят из прямоугольника Δ , на котором ограничены первые производные функции f , то для погрешности метода имеет место оценка

$$\max_k (|x_k - x(t_k)|) \leq \frac{C}{n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где C – некоторая положительная константа.

Доказательство. Подставим в уравнение $x' = f(t, x)$ решение задачи Коши (*в существовании и единственности которого мы предварительно убедились*) и проинтегрируем тождество $x'(t) \equiv f(t, x(t))$ по сегменту $[t_k, t_{k+1}]$. Получим

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2.11.1)$$

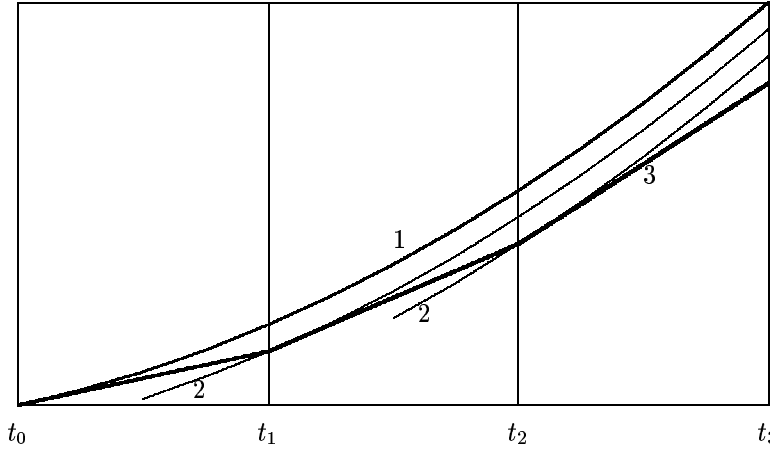


Рис. 1: (1) – искомая интегральная кривая, (2) – "побочные" интегральные кривые, (3) – ломаная Эйлера

В то же время по методу Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k) \cdot h = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, x_k) d\tau. \quad (2.11.2)$$

Вычитая (2.11.2) из (2.11.1) и обозначая $e_k = x(t_k) - x_k$, получим

$$e_{k+1} = e_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(\tau, x(\tau)) - f(t_k, x_k)) d\tau. \quad (2.11.3)$$

Представим подынтегральную функцию в (2.11.3) в виде суммы

$$\begin{aligned} f(\tau, x(\tau)) - f(t_k, x_k) &= \\ &= (f(\tau, x(\tau)) - f(t_k, x(t_k))) + (f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k)). \end{aligned}$$

Применим формулу конечных приращений к первому слагаемому:

$$f(\tau, x(\tau)) - f(t_k, x(t_k)) = (D_\tau f + D_x f \cdot f)(\tilde{\tau}, x(\tilde{\tau})) \cdot (\tau - t_k)$$

($\tilde{\tau}$ – некоторая точка на интервале $]t_k, \tau[$).

Обозначив $A = \sup_{\Delta} (|D_\tau f + D_x f \cdot f|)$, получим

$$|f(\tau, x(\tau)) - f(t_k, x(t_k))| \leq A \cdot (\tau - t_k). \quad (2.11.4)$$

Применим формулу конечных приращений ко второму слагаемому:

$$f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k) = D_x f(t_k, \tilde{x}) \cdot (x(t_k) - x_k) = D_x f(t_k, \tilde{x}) \cdot e_k$$

(\tilde{x} – некоторая точка между x_k и $x(t_k)$).

Обозначив $B = \sup_{\Delta} (|D_x f|)$, получим

$$|f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k)| \leq B \cdot |e_k|. \quad (2.11.5)$$

Из (2.11.3), (2.11.4) и (2.11.5) следует

$$|e_{k+1} - e_k| = \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(\tau, x(\tau)) - f(t_k, x_k)) d\tau \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| (f(\tau, x(\tau)) - f(t_k, x(t_k))) + (f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k)) \right| d\tau \leq \\
&\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(\tau, x(\tau)) - f(t_k, x(t_k))| d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k)| d\tau \leq \\
&\leq A \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\tau - t_k) d\tau + B \cdot |e_k| \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau = A \cdot \frac{h^2}{2} + B \cdot |e_k| \cdot h.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$|e_{k+1}| \leq |e_{k+1} - e_k| + |e_k| \leq (1 + B \cdot h) \cdot |e_k| + A \cdot \frac{h^2}{2}.$$

Выписывая это неравенство для $k = 0, 1, \dots, n-1$, получим

$$\begin{aligned}
|e_1| &\leq A \cdot \frac{h^2}{2}; \\
|e_2| &\leq (1 + B \cdot h) \cdot A \cdot \frac{h^2}{2} + A \cdot \frac{h^2}{2} = (1 + (1 + B \cdot h)) \cdot A \cdot \frac{h^2}{2}; \\
&\dots\dots\dots \\
|e_n| &\leq (1 + (1 + B \cdot h) + \dots + (1 + B \cdot h)^{n-1}) \cdot A \cdot \frac{h^2}{2} = \\
&= \frac{(1 + B \cdot h)^n - 1}{2B} \cdot A \cdot h = \left(\left(1 + \frac{B \cdot (T - t_0)}{n} \right)^n - 1 \right) \cdot \frac{A \cdot (T - t_0)}{2Bn}.
\end{aligned}$$

Из формулы Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2(1+\xi)^2} x^2$$

(ξ – некоторая точка между 0 и x) видно, что $\ln(1+x) \leq x$ при всех $x > -1$. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$n \cdot \ln \left(1 + \frac{B \cdot (T - t_0)}{n} \right) \leq B \cdot (T - t_0).$$

Подставляя это неравенство в оценку для e_n , получим

$$|e_n| \leq \left(\exp(B \cdot (T - t_0)) - 1 \right) \cdot \frac{A \cdot (T - t_0)}{2B} \cdot \frac{1}{n} = \frac{C}{n}.$$

Из полученной оценки следует, что погрешность метода Эйлера можно сделать сколь угодно малой, увеличивая количество узлов сетки.

Замечание. В практических вычислениях обычно используют тот же метод дробления шага, что и в численном интегрировании: удваивают количество узлов сетки до тех пор, пока у двух соседних приближений не совпадет заданное количество значащих цифр. При этом необходимо помнить, что такие косвенные методы контроля точности, будучи достаточно простыми, не дают в то же время полной гарантии достоверности результата.

Метод „прогноз-коррекция“

Если бы мы могли вычислить интеграл в формуле (2.11.1), то получили бы значение решения задачи Коши в очередном узле сетки. Метод Эйлера можно интерпретировать как замену подынтегральной функции в (2.11.1) сплайном первого порядка (константой), что приводит к квадратурной формуле *левых прямоугольников*. Можно рассчитывать, что погрешность метода уменьшится, если использовать сплайн второго порядка, т.е. квадратурную *формулу трапеций*

$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau \approx x_k + \frac{f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})}{2} \cdot h.$$

Однако эту формулу применить нельзя, так как в ее правой части стоит неизвестное пока число $f(t_{k+1}, x_{k+1})$. Поэтому каждый шаг метода прогноз-коррекция разбивается на два подшага.

Предварительный (прогноз) выполняется по методу Эйлера

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k) \cdot h,$$

а заключительный (коррекция) – по формуле трапеций, причем вместо неизвестного x_{k+1} берется результат прогноза \tilde{x}_{k+1} :

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})}{2} \cdot h.$$

Для равномерной сетки справедлива

Теорема. Если как график решения $x(t)$, так и построенные по методу "прогноз-коррекция" точки (t_k, x_k) , $k = 1, \dots, n$, не выходят из прямоугольника Δ , где ограничены *вторые* производные функции f , то имеет место оценка

$$|x(t_k) - x_k| \leq \frac{C}{n^2}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где C – некоторая положительная константа.

Замечания. 1. Существуют методы численного решения задачи Коши, использующие в формуле (2.11.1) сплайн-аппроксимации более высоких порядков. Доказано, что при использовании сплайна порядка m (*и при ограниченности m -х производных функции f*) имеет место неравенство

$$|x(t_k) - x_k| \leq \frac{const}{n^m}.$$

2. Численные методы естественным образом распространяются на задачу Коши для системы уравнений первого порядка.

3. Современная вычислительная математика располагает большим набором машинных программ для численного решения задачи Коши. Так, например, библиотека NAG содержит несколько десятков таких программ. Среды конечного пользователя (MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB) также обеспечивают численное решение задачи Коши.

4. Считаем необходимым еще раз подчеркнуть, что (как и для квадратурных формул) приведенные оценки погрешности получены в предположении *достаточной гладкости функции f* , т.е. при наличии у нее ограниченных частных производных достаточно высокого порядка.

2.12. Понятие устойчивости решения задачи Коши

В приложениях теории обыкновенных дифференциальных уравнений важную роль играет вопрос о влиянии на решение задачи Коши погрешности в начальных условиях.

Можно показать, что имеет место

Теорема. Пусть x – решение задачи Коши

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x^{(0)} \quad (2.12.1)$$

– определено на сегменте $[t_0, T]$. Пусть функция f и ее частная производная $D_x f$ непрерывны при $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любого положительного ε найдется такое положительное δ , что если $|\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}| < \delta$, то \tilde{x} – решение задачи Коши

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = \tilde{x}^{(0)} \quad (2.12.2)$$

– также определено на сегменте $[t_0, T]$, причем выполнено неравенство

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, T].$$

Иначе говоря, *малое изменение* начального условия приводит к *малому изменению* решения на сегменте. Говорят, что решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных данных.

Замечание. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных верна и для систем уравнений. В этом случае в (2.12.1)

$$f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

– вектор-функция, имеющая непрерывные частные производные по компонентам вектора x , а все модули следует заменить на нормы.

Очевидно, что при увеличении длины промежутка, на котором рассматривается решение задачи (2.12.1), для достижения той же допустимой погрешности решения ε придется, вообще говоря, требовать все большей точности начальных данных δ . Поэтому выделяют весьма важный класс решений, для которых оценка погрешности решения *не зависит от промежутка*.

Определение. Пусть вектор-функция f и матрица ее частных производных $D_x f$ непрерывны при $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Решение x задачи Коши (2.12.1) называется *устойчивым по Ляпунову*⁴, если выполнены три условия:

- 1) решение x определено при всех $t \geq t_0$;
- 2) существует такое положительное число ρ , что если $\|\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| < \rho$, то решение \tilde{x} задачи Коши (2.12.2) также определено при всех $t \geq t_0$;
- 3) для любого положительного ε найдется такое положительное $\delta \leq \rho$, что если $\|\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| < \delta$, то

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Таким образом, устойчивость решения по Ляпунову означает, что малое изменение начальных данных приводит к малому изменению решения на *бесконечном* промежутке $[t_0, +\infty[$.

Если система дифференциальных уравнений описывает поведение динамической системы, а $x(t)$ – требуемый режим работы этой системы, то устойчивость по Ляпунову означает, что малые отклонения от этого режима в момент t_0 не приведут к "развалу" системы – система будет всегда находиться вблизи требуемого режима.

Важную роль в приложениях играет еще одно понятие.

Определение. Решение x называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову, и существует такое положительное число $\rho_1 \leq \rho$, что если $\|\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| < \rho_1$, то

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

В применении к динамической системе асимптотическая устойчивость означает, что при малом отклонении от требуемого режима система стремится приблизиться к нему.

Рассмотрим некоторые условия асимптотической устойчивости. Начнем с задачи Коши для линейной системы с постоянными коэффициентами

$$x' = Ax + f; \quad x(t_0) = x^{(0)}. \quad (2.12.3)$$

Теорема. Следующие два утверждения равносильны:

⁴Александр Михайлович ЛЯПУНОВ (1857-1918) – русский математик и механик, академик Петербургской АН, член многих академий и научных обществ. Создатель теории устойчивости движения, автор фундаментальных работ по теории дифференциальных уравнений, математической физике и теории вероятностей.

- 1) решение задачи Коши (2.12.3) асимптотически устойчиво;
- 2) все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части.

Доказательство. Пусть x – решение задачи Коши (2.12.3), а \tilde{x} – решение задачи Коши для той же системы с *другим* вектором начальных данных $\tilde{x}^{(0)}$. Обозначим $z = \tilde{x} - x$, $z_0 = \tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}$. Тогда по формуле (2.4.2) получаем

$$z(t) = \exp(A \cdot (t - t_0)) \cdot z_0 = \exp(-At_0) \cdot \exp(At) \cdot z_0. \quad (2.12.4)$$

Пусть матрица A имеет собственное число λ с неотрицательной вещественной частью. Тогда, если z_0 – соответствующий собственный вектор, то $z(t) = \exp(\lambda \cdot (t - t_0)) \cdot z_0$, и $\|z(t)\| \geq \|z_0\|$ при $t \geq t_0$. Таким образом, при сколь угодно малом по норме векторе z_0 (отклонении начальных данных) отклонение решения z не стремится к нулю, т.е. решение x не является асимптотически устойчивым.

Пусть теперь все собственные числа λ_j матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Из (2.12.4) видно, что

$$\|z(t)\| \leq \|\exp(-At_0)\| \cdot \|\exp(At)\| \cdot \|z_0\|. \quad (2.12.5)$$

Из п.2.5 известно, что изображения элементов матричной экспоненты – правильные рациональные дроби, полюсы которых – собственные числа матрицы A . Разлагая их на простейшие и вспоминая формулу

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s - \lambda)^k} \right) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \exp(\lambda t) \cdot \delta_1(t),$$

получаем, что все элементы матричной экспоненты – линейные комбинации функций вида $t^k \cdot \exp(\lambda_j t)$, где λ_j – собственные числа матрицы A , а $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Поскольку $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, все функции такого вида ограничены на $[0, +\infty[$ и обращаются в нуль при $t = +\infty$. Поэтому

$$\|\exp(At)\| \leq C \quad \text{при } t \in [0, +\infty[; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\exp(At)\| = 0.$$

Таким образом, из (2.12.5) видно, что при $\|z_0\| < \delta$

$$\|z(t)\| \leq \|\exp(-At_0)\| \cdot C \cdot \delta \quad \text{при } t \in [t_0, +\infty[; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t)\| = 0.$$

Из первого соотношения следует устойчивость решения x по Ляпунову; второе означает асимптотическую устойчивость.

Переходя к рассмотрению нелинейных систем, мы ограничимся лишь одной ситуацией. Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемое векторное поле, и $F(x^{(0)}) = \theta_n$. Тогда система дифференциальных уравнений

$$x' = F(x) \quad (2.12.6)$$

имеет решение $x(t) \equiv x^{(0)}$.

Терминологическое замечание. Система уравнений вида (2.12.6) (у которой правая часть не зависит от t) называется *автономной*. Точки, в которых поле F обращается в нуль, именуются *точками покоя* системы.

Пусть \tilde{x} – решение задачи Коши для системы (2.12.6) с вектором начальных данных $\tilde{x}^{(0)}$. Обозначим отклонение решения от точки покоя $z = \tilde{x} - x^{(0)}$ и, используя формулу Тейлора для поля F , перепишем (2.12.6) так:

$$z' = DF(x^{(0)}) \cdot z + \alpha(z) \quad (2.12.7)$$

(α – остаточный член формулы Тейлора).

Поскольку при z , малых по норме, остаточный член мал по сравнению с первым слагаемым в правой части (2.12.7), можно ожидать, что решения системы (2.12.6) в *малой окрестности точки покоя* $x^{(0)}$ ведут себя так же, как решения линейной системы.

Действительно, можно показать, что имеет место

Теорема. Если все собственные числа матрицы $DF(x^{(0)})$ имеют *отрицательные* вещественные части, то решение $x(t) \equiv x^{(0)}$ системы (2.12.6) асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно собственное число матрицы $DF(x^{(0)})$ имеет *положительную* вещественную часть, то решение $x(t) \equiv x^{(0)}$ не будет устойчивым по Ляпунову (и тем более асимптотически устойчивым).

Замечание. Эта теорема называется теоремой об устойчивости по линейному приближению. Если для некоторых собственных чисел матрицы $DF(x^{(0)})$ $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$, а для остальных $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, то эта теорема не дает ответа на вопрос об устойчивости точки покоя.