

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

1. ТЕОРИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

1.1. Криволинейный интеграл

Рассмотрим для начала типичную задачу.

Задача. Дано: 1) непрерывное векторное поле (сила) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, не зависящее от времени

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix};$$

2) гладкий путь¹ точки приложения силы $\mathbf{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \xrightarrow{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{bmatrix}.$$

Найти работу силы \mathbf{f} за промежуток времени $[t_1, t_2]$.

Из курса физики известно, что:

мощность силы равна скалярному произведению этой силы на скорость перемещения ее точки приложения, т.е.

$$P = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle;$$

работа силы равна интегралу

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt.$$

Решение. 1. Находим скорость перемещения точки

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \\ \omega'(t) \end{bmatrix}.$$

2. Находим зависимость силы от времени

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(t) = \begin{bmatrix} f_x(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \\ f_y(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \\ f_z(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \end{bmatrix}.$$

3. Находим зависимость мощности от времени (скалярное произведение силы и скорости)

$$P(t) = \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle(t).$$

4. Интегрируя мощность по заданному промежутку времени, вычисляем искомую работу

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (f_x \cdot \varphi' + f_y \cdot \psi' + f_z \cdot \omega')(t) dt. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Интеграл Римана с такой, как в (1.1.1), структурой подынтегральной функции часто встречается в прикладных задачах. Его принято называть *криволинейным* интегралом от векторного поля \mathbf{f} вдоль пути ℓ от точки A до точки B . Пишут

$$(\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle.$$

¹Напомним, что путь $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется гладким, если в каждой точке пути $t \in [\alpha, \beta]$ существует *ненулевая непрерывная* производная $\mathbf{r}'(t)$.

Расшифровывается этот символ так:

1. задано кусочно непрерывное векторное поле \mathbf{f} ;
2. задан кусочно гладкий путь ℓ , т.е. отображение $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t), \quad t \in [\alpha, \beta];$$

$$\mathbf{r}(\alpha) = A, \quad \text{т.е.} \quad x_A = \varphi(\alpha), \quad y_A = \psi(\alpha), \quad z_A = \omega(\alpha);$$

$$\mathbf{r}(\beta) = B, \quad \text{т.е.} \quad x_B = \varphi(\beta), \quad y_B = \psi(\beta), \quad z_B = \omega(\beta).$$

3. По определению

$$(\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle dt.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл от векторного поля

$$f_x(x, y, z) = y^2, \quad f_y(x, y, z) = z^2, \quad f_z(x, y, z) = x^2$$

вдоль пути, образованного пересечением полусферы

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{и цилиндра} \quad x^2 + y^2 = ax \quad (a > 0).$$

Движение происходит против часовой стрелки, если смотреть из точки $(a, 0, 0)$.

Этот пример взят нами из задачника. Обращаем внимание читателя на то, что по традиции вместо *уравнений* пути дано его *словесное описание*. Поскольку получение уравнений не имеет отношения к рассматриваемой теме, выпишем их без комментариев. Не забудьте лишь проверить направление движения!

$$\mathbf{r} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = a \cdot \cos^2(t), \quad y = a \cdot \sin(t) \cdot \cos(t), \quad z = a \cdot |\sin(t)|.$$

Решение. 1. Строим композицию $\mathbf{f} \circ \mathbf{r} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(t) = a^2 \cdot [\sin^2(t) \cdot \cos^2(t), \sin^2(t), \cos^4(t)]^T.$$

2. Вычисляем производную от пути (скорость):

$$\mathbf{r}'(t) = a \cdot [-2\cos(t) \cdot \sin(t), (\cos^2(t) - \sin^2(t)), \text{sign}(t) \cdot \cos(t)]^T.$$

3. Вычисляем подынтегральную функцию (мощность):

$$P(t) = \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle(t) =$$

$$a^3 (-2\sin^3(t) \cdot \cos^3(t) + \sin^2(t) \cdot (\cos^2(t) - \sin^2(t)) + \cos^5(t) \cdot \text{sign}(t)).$$

4. Вычисляем интеграл Римана (работу):

$$a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-2\sin^3(t)\cos^3(t) + \sin^2(t) \cdot (\cos^2(t) - \sin^2(t)) + \cos^5(t) \cdot \text{sign}(t)) dt = -\pi a^3/4.$$

Замечания. 1. Если ℓ – *замкнутый* путь, то криволинейный интеграл по нему называют *циркуляцией* векторного поля вдоль ℓ и обозначают

$$\oint_{\ell} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle.$$

2. В теории электромагнитного поля *напряжением* между точками A и B вдоль пути ℓ называют криволинейный интеграл

$$U_{AB} = (\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle,$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля.

Электродвижущей силой в контуре (замкнутом проводнике) ℓ называют криволинейный интеграл

$$e = \oint_{\ell} \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle.$$

1.2. Поток векторного поля через поверхность

На рис.1.1 изображена площадка Π , имеющая форму параллелограмма, стороны которого – направленные отрезки \vec{p} и \vec{q} . Если жидкость течет через площадку с *постоянной* скоростью \mathbf{v} , то количество жидкости Q , протекающее через площадку Π в единицу времени, равно объему параллелепипеда, построенного на направленных отрезках $\vec{p}, \vec{q}, \vec{v}$.

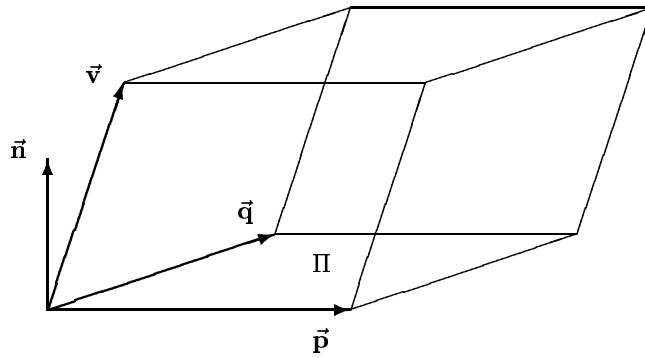


Рис. 1:

Число Q в гидродинамике называют *поток*ом жидкости через площадку Π . Чтобы указать, в каком направлении вычисляется поток, выбирают одно из двух направлений нормали к площадке (направленный отрезок \vec{n} на рис.1.1) и говорят "поток жидкости через площадку Π в направлении \vec{n} ", причем поток считается положительным, если положительна проекция скорости на направление нормали, и отрицательным, если эта проекция отрицательна.

Из курса линейной алгебры известно, что объем параллелепипеда, построенного на направленных отрезках $\vec{p}, \vec{q}, \vec{v}$, равен $|\det([\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}])|$. Вектор $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ ортогонален и \mathbf{p} и \mathbf{q} и, следовательно, коллинеарен нормали. Учитывая, что

$$\det([\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{p} \times \mathbf{q} \rangle,$$

получаем, что поток в направлении \vec{n} равен $\det([\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}])$, если $\vec{n} \uparrow \uparrow \overrightarrow{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}$, и равен $-\det([\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}])$, если $\vec{n} \uparrow \downarrow \overrightarrow{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}$.

Распространим теперь понятие потока на случай произвольного кусочно непрерывного векторного поля $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

и кусочно гладкой² поверхности $\mathbf{r} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \omega(u, v) \end{bmatrix}.$$

Возьмем произвольную точку $(u_0, v_0) \in G$. Рассмотрим прямоугольник Ω с вершинами (u_0, v_0) , $(u_0 + \Delta u, v_0)$, $(u_0, v_0 + \Delta v)$, $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ и образ этого прямоугольника – "лоскут" поверхности (рис.1.2), а также

²Поверхность, задаваемая отображением $\mathbf{r} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, называется гладкой, если в любой точке области G отображение \mathbf{r} имеет непрерывные и неколлинеарные частные производные $D_1\mathbf{r}$ и $D_2\mathbf{r}$. Тем самым обеспечивается существование нормали к поверхности в любой ее точке, причем вектор $D_1\mathbf{r} \times D_2\mathbf{r}$ коллинеарен нормали.

соответствующий кусок касательной плоскости – параллелограмм Π , построенный на направленных отрезках \vec{p} и \vec{q} , где

$$\begin{aligned}\vec{p} &= D_1 \mathbf{r} \cdot \Delta u = \begin{bmatrix} D_1 \varphi(u_0, v_0) \\ D_1 \psi(u_0, v_0) \\ D_1 \omega(u_0, v_0) \end{bmatrix} \cdot \Delta u, \\ \vec{q} &= D_2 \mathbf{r} \cdot \Delta v = \begin{bmatrix} D_2 \varphi(u_0, v_0) \\ D_2 \psi(u_0, v_0) \\ D_2 \omega(u_0, v_0) \end{bmatrix} \cdot \Delta v.\end{aligned}$$

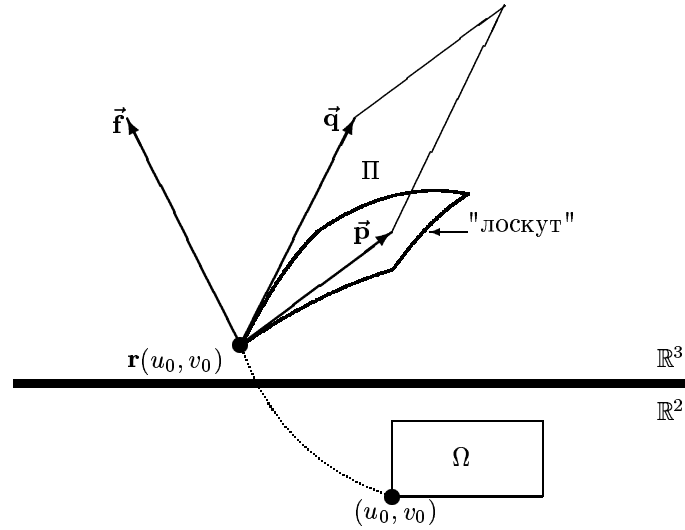


Рис. 2:

Вычислим векторное поле в той же точке

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} f_x(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \omega(u_0, v_0)) \\ f_y(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \omega(u_0, v_0)) \\ f_z(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \omega(u_0, v_0)) \end{bmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на направленных отрезках $\vec{p}, \vec{q}, \vec{f}$ при малых размерах площадки Π должен, по-видимому, мало отличаться от количества "жидкости", протекающей через лоскут поверхности в единицу времени. Это (не имеющее доказательной силы) соображение дает основание ввести

Определение. Поток векторного поля $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ через поверхность $\mathbf{r} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ в направлении, определяемом вектором $D_1 \mathbf{r} \times D_2 \mathbf{r}$, называется двойной интеграл

$$\iint_G \det([\mathbf{f} \circ \mathbf{r}, D_1 \mathbf{r}, D_2 \mathbf{r}])$$

или, в более подробной записи,

$$\iint_G \det \left(\begin{bmatrix} f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)) & D_1 \varphi(u, v) & D_2 \varphi(u, v) \\ f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)) & D_1 \psi(u, v) & D_2 \psi(u, v) \\ f_z(\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)) & D_1 \omega(u, v) & D_2 \omega(u, v) \end{bmatrix} \right) dudv.$$

Замечания. 1. Необходимо, чтобы направление, задаваемое вектором $D_1 \mathbf{r} \times D_2 \mathbf{r}$, во всех точках поверхности определяло "одну и ту же сторону" этой поверхности. Это возможно только для так называемых "двусторонних" поверхностей.

Не имея возможности в рамках нашего курса уточнить понятия *односторонней* и *двусторонней* поверхностей, ограничимся цитатой из учебника А.Д. Александрова³ и Н.Ю. Нецветаева⁴ (Геометрия. – М.: Наука, 1990):

³Александр Данилович АЛЕКСАНДРОВ (1912-1999) – действительный член АН СССР, лауреат Международной премии имени Лобачевского, основатель советской школы "геометрии в целом", в 1952-1964 г.г. – ректор Ленинградского университета, мастер спорта по альпинизму.

⁴Никита Юрьевич НЕЦВЕТАЕВ (род. 1959) – российский геометр, профессор Петербургского университета.

"Интересным примером... является так называемый "лист Мебиуса"⁵. Он выглядит как результат склеивания концов скрученной полоски бумаги. Лист Мебиуса – простейшая односторонняя поверхность. Что это значит? Обычно у поверхности две стороны. Вы можете покрасить одну сторону, скажем, в синий цвет, а другую – в красный, так что цвета нигде не будут граничить друг с другом. Начав же красить с любого места лист Мебиуса, Вы непременно закрасите его целиком – "со всех сторон"! Две стороны исходной полоски бумаги отождествились при склеивании".

Отметим еще, что в трехмерном пространстве все замкнутые поверхности без самопересечений – сфера, тор (поверхность "бублика") и т.п. – являются двусторонними, поэтому можно определять поток векторного поля "внутри" или "наружу".

2. Поток векторного поля \mathbf{f} через поверхность S часто называют поверхностным интегралом и обозначают $\iint_S \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle$.

Пример. Вычислить поток векторного поля

$$f_x(x, y, z) = x^2, \quad f_y(x, y, z) = y^2, \quad f_z(x, y, z) = z^2$$

через внешнюю поверхность расположенной в первом октанте части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Так же, как в случае криволинейного интеграла, приведенная формулировка (стандартная для старых задачников) содержит не относящуюся к теме часть задачи: необходимо написать параметрические уравнения поверхности, заданной словесным описанием. Приводим один из возможных вариантов записи этих уравнений:

$$x = \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), \quad y = \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi), \quad z = \cos(\theta);$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Решение. 1. Строим композицию

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(\theta, \varphi) = [\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\varphi), \sin^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi), \cos^2(\theta)]^T.$$

2. Вычисляем частные производные

$$D_\theta \mathbf{r}(\theta, \varphi) = [\cos(\theta) \cdot \cos(\varphi), \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi), -\sin(\theta)]^T;$$

$$D_\varphi \mathbf{r}(\theta, \varphi) = [-\sin(\theta) \cdot \sin(\varphi), \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), 0]^T.$$

Убедитесь самостоятельно, что вектор $D_\theta \mathbf{r} \times D_\varphi \mathbf{r}$ в каждой точке сферы направлен в ее "внешнюю" сторону.

3. Вычисляем подынтегральную функцию ("элементарный поток")

$$\begin{aligned} \det([\mathbf{f} \circ \mathbf{r}, D_\theta \mathbf{r}, D_\varphi \mathbf{r}]) &= \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & -\sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) & \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos^2(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \sin(\theta) \cdot (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta) \cdot (\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi))). \end{aligned}$$

4. Вычисляем двойной интеграл Римана

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \sin(\theta) d\theta \int_0^{\pi/2} (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta) \times \\ &\times (\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi))) d\varphi = 3\pi/8. \end{aligned}$$

Замечание. Если бы вектор $D_\theta \mathbf{r} \times D_\varphi \mathbf{r}$ "смотрел в другую сторону", то полученный результат следовало бы умножить на (-1) .

1.3. Дивергенция векторного поля.

Теорема Гаусса – Остроградского

Пусть $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – непрерывно дифференцируемое векторное поле:

$$[x, y, z]^T \xrightarrow{\mathbf{f}} [f_x, f_y, f_z]^T.$$

⁵Август Фердинанд МЕБИУС (1790-1868) – немецкий геометр.

Вычислим поток этого поля через кусочно гладкую замкнутую поверхность S , ограничивающую область V , в направлении "наружу".

Замечания. 1. Если обозначить

$$\mathbf{f}_1 = [f_x, 0, 0]^T, \quad \mathbf{f}_2 = [0, f_y, 0]^T, \quad \mathbf{f}_3 = [0, 0, f_z]^T,$$

то $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ и, следовательно,

$$\iint_S \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{f}_1, d\mathbf{S} \rangle + \iint_S \langle \mathbf{f}_2, d\mathbf{S} \rangle + \iint_S \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle.$$

Мы ограничимся вычислением одного из трех полученных *однотипных* интегралов (например, третьего).

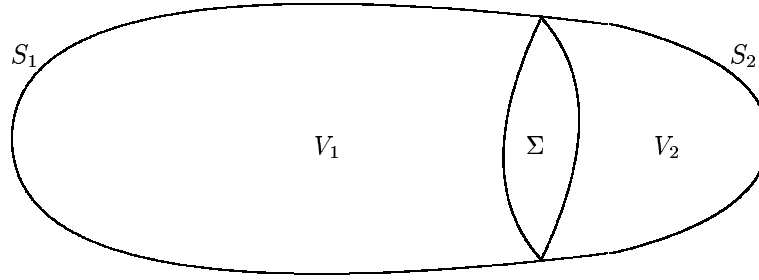


Рис. 3:

2. Если область V разделить на две части V_1 и V_2 кусочно гладкой поверхностью Σ (рис.1.3), то поток векторного поля \mathbf{f} через границу области V_1 (через поверхность S_1 и через поверхность Σ) равен

$$\iint_{S_1} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle + \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle,$$

а поток через границу области V_2 (через поверхность S_2 и через поверхность Σ) равен

$$\iint_{S_2} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle + \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle.$$

Заметим, что потоки вычисляются в направлении внешних (по отношению к области) нормалей. Потоки через "перемычку" Σ в первой и во второй сумме равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Сумма их, очевидно, равна нулю и, следовательно, поток через границу области V равен сумме потоков через границы областей V_1 и V_2 :

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{\partial V_1} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle + \iint_{\partial V_2} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle$$

(символом ∂V принято обозначать границу области V).

Предположим теперь, что каждая прямая, параллельная координатной оси Oz и пересекающая нашу область, пересекает ее по отрезку (этому условию удовлетворяют, например, все выпуклые тела). Для такой области ограничивающая ее поверхность S представится как объединение трех частей (рис.1.4) – S_B (верхней), S (боковой) и S_H (нижней).

На боковой поверхности нормаль и \mathbf{f}_3 перпендикулярны, т.е. $\langle \mathbf{f}_3, \mathbf{n} \rangle = 0$, и, следовательно, поток через эту поверхность равен нулю. Таким образом,

$$\iint_S \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{S_B} \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle + \iint_{S_H} \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle. \quad (1.3.1)$$

Поверхности S_B и S_H являются соответственно графиками функций ω_B и ω_H , которые определены на некоторой плоской области Δ (проекции V на плоскость XOY), включая ее границу.

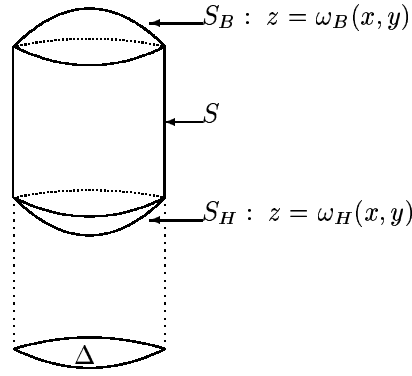


Рис. 4:

Вычислим первый из интегралов в правой части (1.3.1). Поверхность S_B задается отображением $\mathbf{r}_1 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega_B(x, y) \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$D_1 \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ D_1 \omega_B \end{bmatrix}, \quad D_2 \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ D_2 \omega_B \end{bmatrix},$$

и

$$\begin{aligned} \int_{S_B} \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle &= \iint_{\Delta} \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_z & D_1 \omega_B & D_2 \omega_B \end{bmatrix} \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Delta} f_z(x, y, \omega_B(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Знак плюс берется, поскольку вектор

$$D_1 \mathbf{r}_1 \times D_2 \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -D_1 \omega_B \\ -D_2 \omega_B \\ 1 \end{bmatrix},$$

очевидно, задает на S_B направление "вверх", т.е. *наружу* V (третья координата этого вектора положительна).

Для поверхности S_H , задаваемой отображением $\mathbf{r}_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega_H(x, y) \end{bmatrix},$$

аналогично получаем

$$\int_{S_H} \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle = - \iint_{\Delta} f_z(x, y, \omega_H(x, y)) dx dy.$$

Знак минус берется, поскольку вектор

$$D_1 \mathbf{r}_1 \times D_2 \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -D_1 \omega_H \\ -D_2 \omega_H \\ 1 \end{bmatrix},$$

задает на S_H направление тоже "вверх", т.е. *внутри* V .

Подставляя результаты в (1.3.1), имеем

$$\iint_S \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{\Delta} (f_z(x, y, \omega_B(x, y)) - f_z(x, y, \omega_H(x, y))) dx dy.$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$f_z(x, y, \omega_B(x, y)) - f_z(x, y, \omega_H(x, y)) = \int_{\omega_H(x, y)}^{\omega_B(x, y)} D_3 f_z(x, y, z) dz.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle &= \iint_{\Delta} \left(\int_{\omega_H(x, y)}^{\omega_B(x, y)} D_3 f_z dz \right) dxdy = \\ &= \iiint_V D_3 f_z dxdydz. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить

$$\iint_S \langle \mathbf{f}_1, d\mathbf{S} \rangle = \iiint_V D_1 f_x dxdydz; \quad \iint_S \langle \mathbf{f}_2, d\mathbf{S} \rangle = \iiint_V D_2 f_y dxdydz.$$

Складывая, получим (см. замечание 1)

$$\iint_S \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle = \iiint_V (D_1 f_x + D_2 f_y + D_3 f_z) dxdydz.$$

Функция, стоящая под знаком тройного интеграла (след матрицы Якоби векторного поля \mathbf{f}) называется *дивергенцией* этого векторного поля. Пишут

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \operatorname{Sp}(D\mathbf{f}) = D_1 f_x + D_2 f_y + D_3 f_z.$$

Сформулируем теперь доказанную выше теорему.

Теорема Гаусса – Остроградского⁶. Поток векторного поля через замкнутую поверхность в направлении наружу равен интегралу от дивергенции этого поля по области, ограниченной этой поверхностью.

Замечания. 1. Поверхность предполагается кусочно гладкой, а поле – непрерывно дифференцируемым.

2. Мы доказали теорему для областей специального вида. Однако любую область, которая может встретиться на практике, можно разделить на конечное число кусков такого вида. В силу замечания 2 на с.61 поток векторного поля через полную поверхность области равен сумме потоков через полные поверхности ее кусков. Каждый из этих потоков преобразуется по доказанной теореме в интеграл от дивергенции поля по соответствующему куску, а сумма этих интегралов дает интеграл от дивергенции поля по всей области. Это рассуждение доказывает теорему для всех "не очень плохих" областей. Доказательство в общем случае мы проводить не будем.

3. Аналогично предыдущему замечанию, разделяя область на части, можно доказать теорему Гаусса – Остроградского для *кусочно гладкого, непрерывного векторного поля* \mathbf{f} .

4. Если \mathbf{v} – стационарное (не зависящее от времени) поле скоростей движения жидкости, то $\iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{S} \rangle$ – это количество жидкости, вытекающей из области в единицу времени. Очевидно, оно равно разности между количеством жидкости, "образующейся" внутри этой области в единицу времени, и количеством жидкости, "исчезающей" там же и тогда же, т.е. разности между суммарной мощностью "источников" и суммарной мощностью "стоков", находящихся внутри V .

Средняя плотность мощности источников (стоки можно рассматривать как "отрицательные источники") равна

$$\frac{1}{\text{объем } V} \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{v}) dxdydz = \operatorname{div}(\mathbf{v})_{\text{ср.}}.$$

На этом основании в гидравлике дивергенцию поля скоростей называют плотностью мощности источников.

5. Поле, дивергенция которого равна нулю, называется *соленоидальным*, или *полем без источников*. По теореме Гаусса – Остроградского поток такого поля через любую замкнутую кусочно гладкую поверхность равен нулю.

⁶Михаил Васильевич ОСТРОГРАДСКИЙ (1801-1862) – русский математик, один из основателей петербургской математической школы, член Петербургской АН и ряда иностранных академий.

1.4. Ротор векторного поля. Теорема Стокса

Теорема Гаусса – Остроградского устанавливает связь между значениями частных производных компонент векторного поля в области V и значениями поля на границе этой области – поверхности ∂V :

$$\iiint_V (D_1 f_x + D_2 f_y + D_3 f_z) dx dy dz = \iint_{\partial V} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle.$$

Напомним, что теорема Ньютона – Лейбница связывает значения производной функции f в интервале $]a, b[$ и значения этой функции на границе интервала – в точках a и b :

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Сформулируем без доказательства третью теорему того же типа – теорему Стокса⁷, которая связывает значения частных производных компонент векторного поля в области (на поверхности S) и значения этого поля на границе области – кривой ∂S . Предварительно введем новое понятие.

Определение. *Ротором* непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется векторное поле $\mathbf{rot}(\mathbf{f}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, задаваемое формулой

$$\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} D_2 f_z - D_3 f_y \\ D_3 f_x - D_1 f_z \\ D_1 f_y - D_2 f_x \end{bmatrix}.$$

Замечания. 1. Иногда ротор называют *вихрем* векторного поля и обозначают $\mathbf{curl}(\mathbf{f})$.

2. Если $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – *плоское* векторное поле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{bmatrix},$$

то ему можно сопоставить векторное поле $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ротор такого поля равен

$$\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 F_y - D_2 F_x \end{bmatrix} = (D_1 F_y - D_2 F_x) \cdot \mathbf{e}^{(3)}.$$

Иногда в случае плоского поля пишут

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = D_1 F_y - D_2 F_x.$$

3. Если $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – дважды дифференцируемое векторное поле, то $\mathbf{rot}(\mathbf{f})$ – соленоидальное поле. Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{f})) &= D_1(\mathbf{rot}(\mathbf{f}))_1 + D_2(\mathbf{rot}(\mathbf{f}))_2 + D_3(\mathbf{rot}(\mathbf{f}))_3 = \\ &= D_1(D_2 f_z - D_3 f_y) + D_2(D_3 f_x - D_1 f_z) + D_3(D_1 f_y - D_2 f_x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Теорема Стокса. Если $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – непрерывно дифференцируемое векторное поле, а S – двусторонняя кусочно гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 , то поток ротора поля \mathbf{f} через поверхность S равен циркуляции этого поля вдоль кривой ∂S , ограничивающей эту поверхность:

$$\iint_S \langle \mathbf{rot}(\mathbf{f}), d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle.$$

⁷Джордж Габриель СТОКС (1819-1903) – английский физик и математик, член Лондонского Королевского общества, известен работами по оптике, гидродинамике и математической физике.

При этом направление, в котором вычисляется поток, и направление обхода замкнутой кривой ∂S связаны правилом правого винта.

Замечания. 1. Так же, как и теорема Гаусса – Остроградского, теорема Стокса верна и для *кусочно гладкого, непрерывного* векторного поля \mathbf{f} .

2. Если векторное поле \mathbf{f} является градиентом скалярного поля (функционала) q , т.е.

$$\mathbf{f} = \nabla q, \quad (1.4.1)$$

то

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{f}) &= \text{rot}(\nabla q) = \begin{bmatrix} D_2(\nabla q)_3 - D_3(\nabla q)_2 \\ D_3(\nabla q)_1 - D_1(\nabla q)_3 \\ D_1(\nabla q)_2 - D_2(\nabla q)_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} D_2 D_3 q - D_3 D_2 q \\ D_3 D_1 q - D_1 D_3 q \\ D_1 D_2 q - D_2 D_1 q \end{bmatrix} \equiv \theta. \end{aligned}$$

По теореме Стокса циркуляция вектора \mathbf{f} вдоль любого замкнутого контура, *ограничивающего кусочно гладкую двустороннюю поверхность*, равна нулю:

$$\oint_{\partial S} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle = \iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{f}), d\mathbf{S} \rangle = 0. \quad (1.4.2)$$

Функционал q определен равенством (1.4.1) с точностью до аддитивной константы. Его называют *скалярным потенциалом векторного поля \mathbf{f}* , а само векторное поле \mathbf{f} – *потенциальным*.

Серьезное предупреждение. Обратите внимание на то, что потенциал должен быть определен в области, содержащей не только контур, но и всю поверхность S , ограниченную этим контуром. В противном случае соотношение (1.4.2) может не иметь места. Приведем простой пример.

Рассмотрим плоское векторное поле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}$$

и соответствующее ему трехмерное поле \mathbf{f} :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить (проделайте это!), что $\mathbf{f} = \nabla \varphi$, где φ – полярный угол точки (x, y) . Поэтому

$$(\varphi \circ \mathbf{r})' = \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi \circ \mathbf{r})'(t) dt = \\ &= (\varphi \circ \mathbf{r})(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \varphi(B) - \varphi(A). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Пусть теперь контур ℓ – часть окружности (рис.1.5), задаваемая отображением $\mathbf{r} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$x = a \cdot \cos(t), \quad y = a \cdot \sin(t), \quad z = 0.$$

Тогда из (1.4.3) видно, что

$$(\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle = T,$$

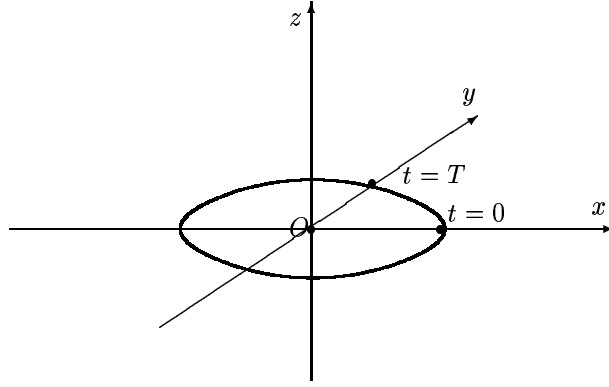


Рис. 5:

и при $T = 2\pi$ получаем

$$\oint_{\ell} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle = 2\pi.$$

Кажущееся противоречие с формулой (1.4.2) объясняется тем, что любая поверхность, ограниченная контуром ℓ , пересекает ось Oz , на которой потенциал φ не определен.

1.5. Формулы интегрирования по частям

С помощью теорем Гаусса – Остроградского и Стокса можно получить формулы преобразования многомерных интегралов, аналогичные известной формуле интегрирования по частям.

Пусть V – область в \mathbb{R}^3 , ограниченная кусочно гладкой поверхностью, u и v – кусочно гладкие, непрерывные функции. Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{f} = uv \cdot \mathbf{e}^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Заметим, что

$$div(\mathbf{f}) = D_k(uv) = D_k u \cdot v + u \cdot D_k v.$$

Теорема Гаусса – Остроградского дает

$$\iiint_V D_k u \cdot v = - \iiint_V u \cdot D_k v + \iint_{\partial V} \langle uv \cdot \mathbf{e}^{(k)}, d\mathbf{S} \rangle.$$

В случае, когда одна из функций u, v обращается в нуль на ∂V , формула интегрирования по частям принимает совсем простой вид:

$$\iiint_V D_k u \cdot v = - \iiint_V u \cdot D_k v. \quad (1.5.1)$$

Аналогично, если S – область в \mathbb{R}^2 , ограниченная кусочно гладкой кривой, u и v – кусочно гладкие, непрерывные функции, одна из которых равна нулю на ∂S , теорема Стокса, примененная к векторному полю

$$\mathbf{f} = uv \cdot \mathbf{e}^{(k)}, \quad k = 1, 2,$$

дает формулу, аналогичную (1.5.1):

$$\iint_S D_k u \cdot v = - \iint_S u \cdot D_k v.$$

1.6. Интеграл от функции комплексной переменной

Уже отмечалось, что в декартовой прямоугольной системе координат точка на плоскости может быть задана одним комплексным числом $z = x + iy$.

Пусть плоская кривая ℓ задана отображением $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \xrightarrow{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{bmatrix}.$$

Ее, очевидно, можно также задать одной *комплекснозначной функцией* вещественной переменной

$$w : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}; \quad w(t) = \varphi(t) + i \cdot \psi(t).$$

Определение. Пусть $G \subset \mathbb{C}$; $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ – кусочно непрерывная функция комплексной переменной. Интегралом от функции f по кусочно гладкой кривой ℓ называется интеграл Римана

$$\int_{(\ell)} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(w(t)) w'(t) dt.$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} \int_{(\ell)} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(F_1(w(t)) \cdot \varphi'(t) - F_2(w(t)) \cdot \psi'(t) \right) dt + \\ &+ i \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \left(F_1(w(t)) \cdot \psi'(t) + F_2(w(t)) \cdot \varphi'(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Здесь $F_1 = \operatorname{Re}(f)$, $F_2 = \operatorname{Im}(f)$.

Мы видим, что вычисление интеграла от функции комплексной переменной $f = F_1 + i \cdot F_2$ сводится к вычислению двух *криволинейных* интегралов от плоских векторных полей $[F_1, -F_2]^T$ и $[F_2, F_1]^T$.

Если f – *аналитическая* функция, то, как известно, компоненты поля F_1 и F_2 удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$D_1 F_1 = D_2 F_2, \quad D_1 F_2 = -D_2 F_1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\begin{bmatrix} F_1 \\ -F_2 \end{bmatrix} \right) &= (-D_1 F_2 - D_2 F_1) \cdot \mathbf{e}^{(3)} \equiv \theta; \\ \operatorname{rot} \left(\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} \right) &= (D_1 F_1 - D_2 F_2) \cdot \mathbf{e}^{(3)} \equiv \theta. \end{aligned}$$

Из теоремы Стокса следует теперь

Теорема Коши. Интеграл от *аналитической* функции по кусочно гладкой *замкнутой* кривой равен нулю.

1.7. Уравнения Максвелла

Электромагнитное поле – это упорядоченная пара векторных полей $\mathbf{E} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\mathbf{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, где

$$\mathbf{E} = [E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t)]^T$$

– *напряженность электрического поля*;

$$\mathbf{H} = [H_x(x, y, z, t), H_y(x, y, z, t), H_z(x, y, z, t)]^T$$

– *напряженность магнитного поля*.

Наряду с векторными полями \mathbf{E} и \mathbf{H} в теории электромагнитного поля рассматривается еще два векторных поля: поле *электрического смещения* $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, где ε – (3×3) -матрица *диэлектрической проницаемости*, и поле *магнитной индукции* $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, где μ – (3×3) -матрица *магнитной проницаемости*.

В случае однородной и изотропной среды матрицы диэлектрической и магнитной проницаемости принимают вид $\varepsilon \cdot I_3$ и $\mu \cdot I_3$ (здесь ε и μ – уже *числа*, а I_3 – единичная матрица).

Теория Максвелла⁸ позволяет находить электрическое и магнитное поля, создаваемые заданными электрическими зарядами и токами.

Уравнения Максвелла естественным образом формулируются с помощью введенных нами операций rot и div :

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

⁸Джеймс Клерк МАКСВЕЛЛ (1831-1879) – шотландский физик, член Лондонского королевского общества. Первый сделал попытку создать общую теорию электромагнетизма, способствовал формированию теории векторного поля в виде отдельной математической дисциплины.

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}) = \rho; \quad \operatorname{div}(\mathbf{B}) \equiv 0.$$

Здесь ρ – плотность объемных зарядов, а \mathbf{j} – вектор плотности токов проводимости.

В задачах электростатики $\mathbf{j} = \mathbf{B} = \mathbf{H} \equiv 0$. Поэтому из четырех уравнений Максвелла остаются два:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = 0; \quad \operatorname{div}(\mathbf{D}) = \rho. \quad (1.7.1)$$

Если искать вектор-функцию \mathbf{E} в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi,$$

(функция φ называется *скалярным потенциалом* электрического поля), то первое уравнение (1.7.1) выполняется автоматически (см. замечание 2 на с.68), а второе дает

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \cdot \nabla\varphi) = \rho.$$

В случае однородной изотропной среды это уравнение переписывается так:

$$-\operatorname{div}(\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.7.2)$$

Замечание. Дифференциальный оператор

$$\operatorname{div}(\nabla\varphi) = D_1 D_1 \varphi + D_2 D_2 \varphi + D_3 D_3 \varphi,$$

стоящий в левой части (1.7.2), называется *оператором Лапласа* и обозначается $\Delta\varphi$.

Уравнение

$$-\Delta\varphi = f,$$

именуемое *уравнением Пуассона*, возникает не только в задачах электростатики, но и во многих других прикладных задачах.

В заключение рассмотрим элементарную теорию идеального трансформатора⁹.

Протекающий по первичной обмотке трансформатора переменный ток создает в ферромагнитном сердечнике переменное магнитное поле. Мы назвали трансформатор идеальным, имея в виду, что магнитный поток распространяется только в сердечнике (потоки рассеяния в воздухе отсутствуют).

На рис.1.6 изображены сердечник и обмотка трансформатора в разрезе.

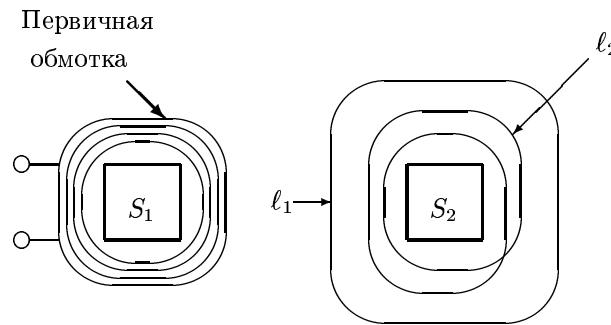


Рис. 6: S_1, S_2 – сечения сердечника

Если проводник (замкнутый контур ℓ_1 на рис.1.6) охватывает сечение сердечника S_2 , то возникающая в этом проводнике электродвижущая сила равна

$$e = \oint_{\ell_1} \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle. \quad (1.7.3)$$

Применим теорему Стокса к (1.7.3). Из уравнений Максвелла $\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, и мы получаем

$$e = \iint_{S_2} \left\langle -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right\rangle$$

⁹Мы надеемся, что студент *технического* университета когда-нибудь видел трансформатор.

(интеграл берется по S_2 , поскольку в области между S_2 и контуром магнитная индукция \mathbf{B} равна нулю (трансформатор идеальный!)).

Если проводник (ℓ_2 на рис.1.6) обходит вокруг S_2 дважды, электродвижущая сила увеличивается в два раза (интеграл по всему пути равен сумме интегралов по его частям). Отсюда следует известный закон: *напряжение на вторичной обмотке трансформатора пропорционально числу витков этой обмотки.*