

## 6. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

### 6.1. Две содержательные задачи

Задача 1. В п.4.1 изучалась задача о стационарном тепловом режиме в *тонком* проводнике, нагреваемом током. Основой для построения математической модели при этом служило уравнение теплового баланса (4.1.2).

В нестационарном случае количество тепла в элементе проводника за время  $\Delta t$  изменится, что приведет к изменению температуры элемента. Поэтому вместо (4.1.2) следует написать новое уравнение теплового баланса

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = c \cdot \Delta x \cdot S \cdot (T(t + \Delta t, x) - T(t, x)) \quad (6.1.1)$$

( $c$  – объемная теплоемкость материала проводника).

Подставим в (6.1.1) выражения для  $\Delta Q_1$ ,  $\Delta Q_2$  и  $\Delta Q_3$ , полученные в п.4.1:

$$\begin{aligned} c \cdot \Delta x \cdot S \cdot (T(t + \Delta t, x) - T(t, x)) = \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(\tau, x + \Delta x) - T(\tau, x)}{\Delta x} - \\ - \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(\tau, x) - T(\tau, x - \Delta x)}{\Delta x} + \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot S. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Здесь  $\tau$  – некоторый момент времени из интервала  $]t, t + \Delta t[$ .

Из уравнения (6.1.2) можно получить два различных разностных уравнения с *двумя переменными*, заменяя  $\tau$  на  $t$  либо на  $t + \Delta t$ . Эти уравнения представляют собой дискретные модели исходной задачи.

Мы не будем выписывать получающиеся громоздкие выражения. Отметим лишь, что сокращая (6.1.2) на  $\Delta t \cdot \Delta x \cdot S$  и переходя к пределу ( $\Delta t = \Delta x = 0$ ), получим (в предположении достаточной гладкости функции  $T$ ) континуальную модель задачи – дифференциальное уравнение в частных производных

$$c \cdot D_t T = D_x (\lambda \cdot D_x T) + \gamma \quad (6.1.3)$$

(здесь учтено, что коэффициенты  $\lambda$  и  $c$  не зависят от  $t$ , но, вообще говоря, зависят от  $x$ ).

Уравнение (6.1.3) в память о породившей его содержательной задаче называется *уравнением теплопроводности*.

Задача 2. Рассмотрим (в упрощенном, естественно, виде) задачу о передаче электрической энергии по *длинной* линии.

В школьном курсе физики обычно считают, что напряжение и ток – функции времени, *не зависящие от точки проводника*. Это связано с тем, что электромагнитное поле распространяется со скоростью света – около  $3 \cdot 10^8$  м/с. Поэтому, например, для синусоидального тока стандартной частоты (50 Гц) за время изменения напряжения от минимального до максимального значения (0.01 с) точка минимума напряжения успеет "пробежать" по линии около 3000 км. Если длина линии составляет несколько метров, то, естественно, изменением тока и напряжения вдоль линии можно пренебречь.

Однако при передаче энергии на большие – сотни километров – расстояния эти изменения должны учитываться. Конечно, тот же эффект может возникнуть и в линии длиной в несколько сантиметров, если частота тока очень велика (например, в современном компьютере). В таких случаях линию называют *длинной*.

Итак, возьмем участок линии длиной  $\Delta x$  (рис. 6.1) и промежуток времени  $\Delta t$ .

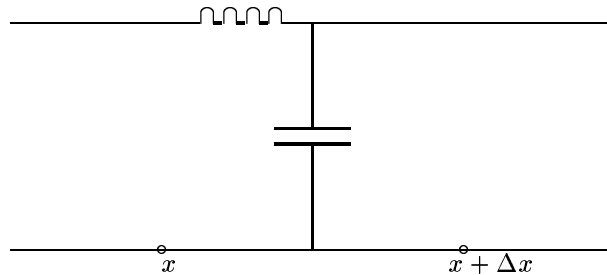


Рис. 1:

Пренебрегая потерями в активном сопротивлении проводника и утечкой тока из-за несовершенства изоляции, будем характеризовать этот участок удельной индуктивностью  $L$  и удельной емкостью  $C$ . Тогда падение напряжения на участке будет равно (по закону электромагнитной индукции)

$$u(x + \Delta x, \tau_1) - u(x, \tau_1) = -L \cdot \Delta x \frac{i(t + \Delta t, \xi_1) - i(t, \xi_1)}{\Delta t}.$$

Изменение величины тока (часть его уходит на заряд емкости) будет равно

$$i(x + \Delta x, \tau_2) - i(x, \tau_2) = -C \cdot \Delta x \frac{u(t + \Delta t, \xi_2) - u(t, \xi_2)}{\Delta t}.$$

В этих равенствах  $\tau_k$  и  $\xi_k$  ( $k = 1, 2$ ) – некоторые точки из интервалов  $]t, t + \Delta t[$  и  $]x, x + \Delta x[$  соответственно. Заменяя  $\xi_k$  на  $x$  или  $x + \Delta x$ , а  $\tau_k$  – на  $t$  или  $t + \Delta t$ , можно получить различные дискретные модели задачи – системы разностных уравнений.

Если разделить оба уравнения на  $\Delta x$  и, предполагая непрерывную дифференцируемость функций  $u$  и  $i$ , перейти к пределу ( $\Delta t = \Delta x = 0$ ), то получим континуальную модель задачи – систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} -D_t i &= \frac{1}{L} \cdot D_x u; \\ D_x i &= -C \cdot D_t u. \end{cases}$$

Если повысить требования к гладкости функций, входящих в уравнения этой системы, то, исключая, например,  $i$  (т.е. дифференцируя первое уравнение по  $x$ , а второе – по  $t$ ), получим

$$C \cdot D_{tt}^2 u = D_x \left( \frac{1}{L} \cdot D_x u \right) \quad (6.1.4)$$

(аналогично (6.1.3), коэффициенты  $L$  и  $C$  не зависят от  $t$ , но, вообще говоря, зависят от  $x$ ).

Если  $L$  и  $C$  – константы, то (6.1.4) можно переписать так:

$$D_{tt}^2 u = v^2 \cdot D_{xx}^2 u \quad (6.1.5)$$

(здесь  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ).

Убедитесь, что функция

$$u(x, t) = \varphi(x + vt) + \psi(x - vt),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, будет решением уравнения (6.1.5).

Заметим, что функция  $\varphi(x + vt)$  имеет очевидный физический смысл: она описывает *волну*, бегущую по линии со скоростью  $v$  в отрицательном направлении оси абсцисс (рис.6.2). Аналогично, функция  $\psi(x - vt)$  описывает волну, бегущую со скоростью  $v$  в положительном направлении оси абсцисс. Поэтому уравнение (6.1.5), как и более общее уравнение (6.1.4), называется *волновым уравнением*.

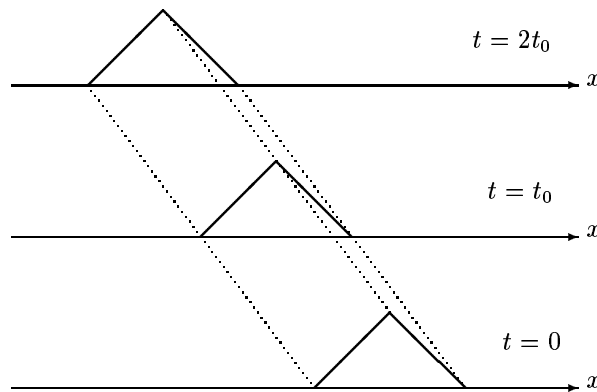


Рис. 2: Положение волны в различные моменты времени

## 6.2. Основные определения

Уравнение (6.1.3) представляет собой пространственно одномерный вариант уравнения теплопроводности

$$r \cdot D_t u = \operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) + f, \quad (6.2.1)$$

возникающего при описании процессов теплопередачи, диффузии и некоторых других.

Здесь коэффициенты  $\lambda$  и  $r$  – заданные *положительные* непрерывные функции координат ( $\lambda$  имеет также непрерывные первые производные), а свободный член  $f$  – заданная кусочно непрерывная функция времени и координат (в (6.1.3)  $f = \gamma$ ).

Уравнение (6.2.1) рассматривается при  $t \in ]0, T_0]$ ,  $x \in \Omega$ , где  $\Omega$  – ограниченная область с кусочно гладкой границей в  $\mathbb{R}^n$  (в приложениях  $n$  может равняться 1, 2 или 3).

Замечание. Если  $\lambda$  и  $r$  – константы, уравнение теплопроводности принимает вид

$$D_t u = a^2 \Delta u + \frac{f}{r}$$

(здесь  $a = \sqrt{\frac{\lambda}{r}}$ ).

При постановке *начально-краевой задачи* к уравнению теплопроводности добавляют начальное условие

$$u(x, 0) \Big|_{x \in \Omega} = u_0(x) \quad (6.2.2)$$

(т.е. задают начальное распределение температуры в области), а также краевое условие первого, второго или третьего рода, описанное в п.5.2.

Уравнение (6.1.4) представляет собой пространственно одномерный вариант волнового уравнения

$$r \cdot D_{tt}^2 u = \operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) + f, \quad (6.2.3)$$

которое описывает колебательные процессы разнообразной природы и возникает в задачах механики сплошной среды, акустики, электродинамики и других.

Здесь  $\lambda$ ,  $r$  и  $f$  – функции с теми же свойствами, что и в (6.2.1). Если  $\lambda$  и  $r$  – константы, волновое уравнение принимает вид

$$D_{tt}^2 u = v^2 \cdot \Delta u + \frac{f}{r}$$

(здесь  $v = \sqrt{\frac{\lambda}{r}}$ ).

Уравнение (6.2.3) рассматривается при  $t \in [0, T_0]$ ,  $x \in \Omega$ , где  $\Omega$  – ограниченная область с кусочно гладкой границей в  $\mathbb{R}^n$  (очевидно, в приложениях  $n = 1, 2$  или 3).

Добавляя к уравнению (6.2.3) *два* начальных условия

$$u(x, 0) \Big|_{x \in \Omega} = u_0(x), \quad D_t u(x, 0) \Big|_{x \in \Omega} = u_1(x),$$

а также краевое условие одного из типов, рассмотренных в п.5.2, получим *начально-краевую задачу* для волнового уравнения.

Замечание. Аналогично главам 4 и 5 краевые условия можно считать однородными.

### 6.3. Проекционные методы решения начально-краевых задач

В этом пункте кратко изложена идея применения проекционных методов для решения нестационарных задач. Мы ограничимся случаем, когда на всей границе области  $\Omega$  задано однородное условие Дирихле. Будем считать также, что  $r \equiv 1$ .

Начнем с уравнения теплопроводности. Зафиксируем  $t \in ]0, T_0]$  и умножим скалярно уравнение

$$D_t u = \operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) + f \quad (6.3.1)$$

на произвольную вещественную кусочно гладкую, непрерывную функцию  $\phi$ , равную нулю на  $\partial\Omega$ :

$$\int_{\Omega} D_t u \cdot \phi = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) + f) \cdot \phi.$$

Аналогично п.5.4, преобразуем правую часть этого равенства, применяя интегрирование по частям. Получим

$$\int_{\Omega} D_t u \cdot \phi = - \int_{\Omega} \lambda \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle + \int_{\Omega} f \cdot \phi. \quad (6.3.2)$$

"Интегральное тождество"(6.3.2) должно выполняться при всех  $t \in ]0, T_0]$ . В начальный момент времени (при  $t = 0$ ), очевидно, выполнено тождество, следующее из начального условия (6.2.2):

$$\int_{\Omega} u|_{t=0} \cdot \phi = \int_{\Omega} u_0 \cdot \phi. \quad (6.3.3)$$

Рассмотрим конечный набор линейно независимых *функций пространственных переменных*  $\{\phi_k\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , равных нулю на  $\partial\Omega$ . Будем искать приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения (6.3.1) в виде "линейной комбинации" функций  $\{\phi_k\}$ , коэффициенты которой – *функции времени*:

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \cdot \phi_k(x). \quad (6.3.4)$$

Подставляя в (6.3.2) и (6.3.3)  $\phi = \phi_m$ ,  $m = 1, \dots, N$ , получаем, что вектор коэффициентов  $c_k$  есть решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянной матрицей:

$$c'(t) = -A \cdot c(t) + b(t); \quad c(0) = c^{(0)}. \quad (6.3.5)$$

Элементы матрицы коэффициентов этой системы задаются формулой (5.4.3), свободные члены – формулой (5.4.4), а начальные данные определяются по формуле

$$c_m^{(0)} = \int_{\Omega} u_0 \cdot \phi_m, \quad m = 1, \dots, N.$$

Задача Коши (6.3.5), как известно, имеет единственное решение

$$c(t) = \exp(-At) \cdot c^{(0)} + \int_0^t \exp(-A \cdot (t - \tau)) \cdot b(\tau) d\tau, \quad (6.3.6)$$

и, таким образом, при любом  $N$  определено приближенное решение  $\hat{u}$ .

Если в качестве  $\{\phi_k\}$  взять первые  $N$  собственных функций стационарной краевой задачи

$$-div(\lambda \cdot \nabla \varphi) = \nu \cdot \varphi, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.3.7)$$

то матрица  $A$  окажется диагональной:

$$A = diag[\nu_1, \dots, \nu_N]$$

( $\nu_k$  – соответствующие собственные числа). В этом случае задача Коши (6.3.5) решается особенно просто (каждое уравнение можно решать независимо от остальных). Можно показать, что приближенное решение (6.3.4) при каждом  $t$  будет просто частной суммой ряда Фурье точного решения по системе собственных функций  $\{\phi_k\}$ .

Пример. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (6.1.3) при  $c = \lambda \equiv 1$  :

$$D_t u = D_{xx}^2 u + \gamma, \quad x \in ]0, 1[, \quad t > 0; \quad u(0, x) = 0; \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0.$$

Будем искать приближенное решение этой задачи в виде "линейной комбинации" собственных функций линейного оператора  $L\varphi \equiv -\varphi''$  с краевыми условиями  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ .

Так же, как в примере 1 п.4.4, получаем

$$\nu_k = k^2 \pi^2, \quad \varphi_k(x) = \sin(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Задача Коши (6.3.5) принимает вид

$$c'_k = -\nu_k c_k + b_k, \quad c_k(0) = 0; \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$b_k = \frac{\int_0^1 \gamma \cdot \varphi_k}{\int_0^1 |\varphi_k|^2} = \begin{cases} \frac{4\gamma}{k\pi}, & k \text{ нечетное;} \\ 0, & k \text{ четное} \end{cases}$$

(поскольку  $f$  здесь не зависит от  $t$ , то и  $b_k$  также не зависят от  $t$ ).

Решение этой задачи Коши при нечетных  $k$  дается формулой

$$c_k(t) = b_k \cdot \int_0^t \exp(-\nu_k \cdot (t - \tau)) d\tau = \frac{4\gamma}{k^3 \pi^3} (1 - \exp(-k^2 \pi^2 t))$$

(при четных  $k$ , очевидно,  $c_k(t) \equiv 0$ ).

Отсюда получаем выражение для приближенного решения начально-краевой задачи:

$$\hat{u}(t, x) = \sum_{m=1}^N \frac{4\gamma}{(2m-1)^3 \pi^3} (1 - \exp(-(2m-1)^2 \pi^2 t)) \cdot \sin((2m-1)\pi x).$$

При  $N \rightarrow \infty$  получаем точное решение задачи в форме ряда Фурье:

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4\gamma}{(2m-1)^3 \pi^3} (1 - \exp(-(2m-1)^2 \pi^2 t)) \cdot \sin((2m-1)\pi x).$$

**Замечания.** 1. В случае, когда в уравнении (6.2.1)  $r \neq 1$ , вместо собственных функций краевой задачи (6.3.7) следует использовать собственные функции с весом  $r$ :

$$-div(\lambda \cdot \nabla \varphi) = \nu \cdot r \cdot \varphi, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0.$$

2. Вновь напомним, что все случаи, когда собственные функции краевой задачи можно выписать "в явном виде", перечислены в справочниках.

В общем случае в качестве набора  $\{\phi_k\}$  обычно выбирают "конечные элементы", описанные в п.п. 4.5 и 5.4. Задача Коши (6.3.5) решается каким-нибудь из стандартных численных методов.

Начально-краевая задача для волнового уравнения

$$D_{tt}^2 u = div(\lambda \cdot \nabla u) + f$$

аналогичной процедурой приводится к задаче Коши для системы линейных дифференциальных уравнений *второго* порядка с постоянной матрицей:

$$c''(t) = -A \cdot c(t) + b(t); \quad c(0) = c^{(0)}, \quad c'(0) = c^{(1)},$$

где матрица коэффициентов и свободные члены определяются теми же формулами, что и раньше, а начальные данные – формулами

$$c_m^{(0)} = \int_{\Omega} u_0 \cdot \phi_m, \quad c_m^{(1)} = \int_{\Omega} u_1 \cdot \phi_m, \quad m = 1, \dots, N.$$

Поскольку эта система легко сводится к системе уравнений первого порядка, принципиальных отличий от рассмотренной выше схемы здесь нет. Обсуждение же технологических проблем выходит за рамки нашего курса.