

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ

Мы будем разграничивать *содержательную задачу*, решить которую необходимо *специалисту-нематематику*, и *математическую модель*, которую исследует *математик*. Вопрос об адекватности математической модели и породившей ее содержательной задачи не только выходит за рамки нашего курса, но вообще не может быть отнесен к предмету математики.

1.1. Дискретное пространство элементарных событий

Мы будем рассматривать некоторый эксперимент, который может закончиться одним из *взаимоисключающих исходов*. Эти исходы эксперимента мы будем называть *элементарными событиями*.

Будем пока что предполагать, что множество всех элементарных событий *конечно* или *счетно*¹. Назовем это множество *дискретным пространством элементарных событий*. Обычно его обозначают Ω , а элементарные события – $\omega \in \Omega$.

Примеры. 1. Бросается правильная монета. Обычно считают, что возможны два исхода этого эксперимента, и называют их герб (Г) и решетка (Р). Таким образом, пространство элементарных событий состоит из двух элементов $\Omega = \{Г, Р\}$.

Замечание. Если в реальном эксперименте монета встанет *на ребро*, мы должны либо считать этот эксперимент несостоявшимся (так как подобный исход *не включен нами* в пространство элементарных событий), либо *изменить первоначальную модель* и рассматривать пространство элементарных событий из трех элементов $\Omega = \{Г, Р, Н\}$ (Н означает "на ребро").

Этот простой пример еще раз показывает, что одна и та же *содержательная задача* может привести к различным *математическим моделям*. Именно поэтому мы и будем изучать математические модели, не задумываясь об их происхождении.

2. Эксперимент состоит в бросании правильной монеты *до первого появления герба*. Ниже выписаны несколько элементарных событий:

,
, ,
...
, , , , ,
...

Хотя не очень верится, что десять тысяч раз подряд будет выпадать решетка, и лишь на десять тысяч первый раз выпадет герб, но исключить такой исход никто не отважится. Поэтому пространство элементарных событий в этом примере полагают счетным.

1.2. Вероятность

Зафиксируем некоторый исход. Каждый реальный эксперимент может закончиться либо этим исходом, либо каким-нибудь другим. Если в *неизменных условиях* эксперимент повторили n раз, и в m случаях он закончился отмеченным исходом, то говорят, что наблюдалась *относительная частота* $\frac{m}{n}$ этого исхода.

Теория вероятностей пригодна для описания тех реальных экспериментов, в которых наблюдается *устойчивость относительных частот*: длинные серии экспериментов приводят, *как правило*, к *близким* значениям относительных частот.

Математической моделью реального эксперимента служит дискретное пространство элементарных событий. Математическим аналогом относительной частоты исхода эксперимента является *вероятность элементарного события* ω – вещественное число $P(\omega)$, удовлетворяющее двум условиям:

$$0 \leq P(\omega) \leq 1; \quad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

¹Множество называется *счетным*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между его элементами и натуральными числами. Можно показать, например, что множество всех рациональных чисел счетно, а множество всех вещественных чисел – несчетно.

(во втором условии фигурирует *сумма* – для конечного пространства элементарных событий и *сумма ряда* – для счетного).

Серьезное предупреждение. Еще раз подчеркнем, что применение теории вероятностей для описания эксперимента возможно лишь при наличии *статистической устойчивости* относительной частоты исходов. Имеется в виду, что при *многократном* повторении *длинных* серий экспериментов в *неизменных* условиях относительные частоты, *как правило*, меняются мало. Слова "многократно", "длинные", "неизменные", "как правило" не могут быть уточнены. Они относятся к неалгоритмизируемой процедуре перехода от реального эксперимента к его математической модели, и ответственность за справедливость этих слов несет тот *специалист-нематематик*, который решается применить теорию вероятностей к описанию своей задачи.

Примеры. 1. Если бросается *правильная* монета, то относительные частоты выпадения герба и решетки должны быть примерно равны. Поэтому разумно приписать элементарным событиям P и Γ одинаковые вероятности $P(\Gamma) = P(P)$.

Если $\Omega = \{\Gamma, P\}$, то $P(\Gamma) + P(P) = 1$. Отсюда $P(\Gamma) = P(P) = 1/2$.

2. *Правильная* монета бросается до первого выпадения герба. Обозначим ω_n элементарное событие, соответствующее выпадению герба при n -м бросании монеты. Положим $P(\omega_n) = 2^{-n}$ (причины данного выбора мы не рассматриваем). Вычислив

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\omega_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1,$$

убедимся в *допустимости* такого задания вероятностей.

1.3. Случайные события в дискретном пространстве элементарных событий

Случайным событием (событием) называют всякую часть (подмножество) дискретного пространства элементарных событий. Говорят, что в результате эксперимента *событие произошло*, если эксперимент закончился одним из *взаимоисключающих* исходов, составляющих это событие.

Вероятность случайного события равна *по определению* сумме вероятностей элементарных событий, составляющих это событие:

$$A \subset \Omega \implies P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Оправдание такого определения вероятности события – ее частотная интерпретация: относительная частота появления хотя бы одного из взаимоисключающих исходов равна, очевидно, сумме относительных частот этих исходов.

Пример. Эксперимент состоит в бросании игральной кости – правильного куба, грани которого помечены цифрами от 1 до 6. Здесь $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, и, вследствие правильности куба, разумно считать элементарные события равновероятными:

$$P(n) = 1/6; \quad n = 1, \dots, 6.$$

Если $A = \{1, 3, 5\}$ (в результате эксперимента выпала нечетная цифра), то $P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = 3 \cdot 1/6 = 1/2$.

Замечания. 1. Иногда в задачах необходимо суммировать вероятности большого количества элементарных событий, составляющих данное событие. При этом приходится использовать специальные методы *комбинаторики*. Мы же ограничимся рассмотрением достаточно простых примеров, в которых вычислительные сложности не возникают.

2. Одно слово "вероятность" смысла не имеет. Следует всегда говорить "вероятность события" и указывать, о каком событии идет речь.

Пример. Если эксперимент состоит в бросании *правильной* монеты до первого выпадения герба, то будем (как и раньше) считать, что ω_n – элементарное событие "первый раз герб появился при n -м бросании" и $P(\omega_n) = 2^{-n}$.

Найдем вероятности событий A (игра закончится на нечетном бросании монеты) и B (игра закончится на четном бросании монеты):

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-(2n-1)} = \frac{1/2}{1 - 1/4} = 2/3;$$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-2n} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = 1/3.$$

Мы получили важный для игроков результат: если монету бросают по очереди, то преимущество имеет бросающий первым.

Замечание. По-видимому, теория вероятностей обязана своим появлением потребности участников азартных игр в выработке "выигрышной стратегии". Разделом математики теория вероятностей стала сравнительно недавно. Поэтому сохранилась "доматематическая" терминология, которой не следует злоупотреблять. Мы будем стараться пользоваться современной терминологией, сохраняя лишь некоторые устоявшиеся термины.

Принято называть случайное событие Ω ($\Omega \subset \Omega$) *достоверным* событием, а случайное событие \emptyset ($\emptyset \subset \Omega$) *невозможным* событием. Отметим, что $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Если $A, B \subset \Omega$ и $A \cap B = \emptyset$, то A и B называют *несовместными* событиями. Если $A \cap B \neq \emptyset$, то A и B называют *совместными* событиями.

Переведите на язык "исходов эксперимента" понятия "достоверное событие", "невозможное событие", "несовместные события".

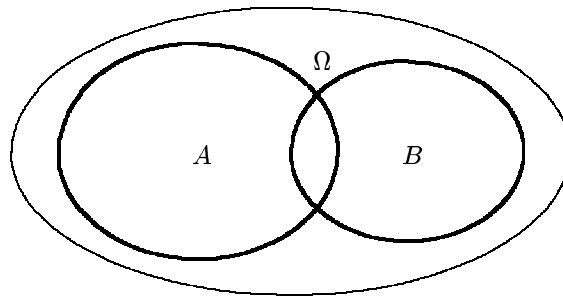


Рис. 1:

Пусть теперь $A, B \subset \Omega$ (рис.1.1). Выделим следующие события (множества): $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ (напомним, что $A \setminus B$ состоит из всех элементарных событий, которые входят в A и не входят в B ; $B \setminus A$ – из всех элементарных событий, которые входят в B и не входят в A ; $A \cap B$ – из всех элементарных событий, которые входят и в A , и в B).

Любые два из трех описанных множеств не пересекаются (события $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ *попарно несовместны*).

Очевидно, что

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B); \quad B = (B \setminus A) \cup (A \cap B);$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B).$$

Поскольку вероятность события определена как сумма вероятностей составляющих его элементарных событий, из этих равенств следует, что

$$P(A) = \sum_{\omega \in A \setminus B} P(\omega) + \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega);$$

$$P(B) = \sum_{\omega \in B \setminus A} P(\omega) + \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega);$$

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \setminus B} P(\omega) + \sum_{\omega \in B \setminus A} P(\omega) + \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega).$$

Отсюда получаем утверждение, известное как *теорема сложения вероятностей*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(если просто сложить вероятности событий A и B , то вероятности элементарных событий, содержащихся в $A \cap B$, войдут в сумму дважды).

В частности, если события A и B несовместны ($A \cap B = \emptyset$), то

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{и} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Для трех событий A , B и C рассмотрение диаграммы Венна (рис.1.2) позволяет записать равенство

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$

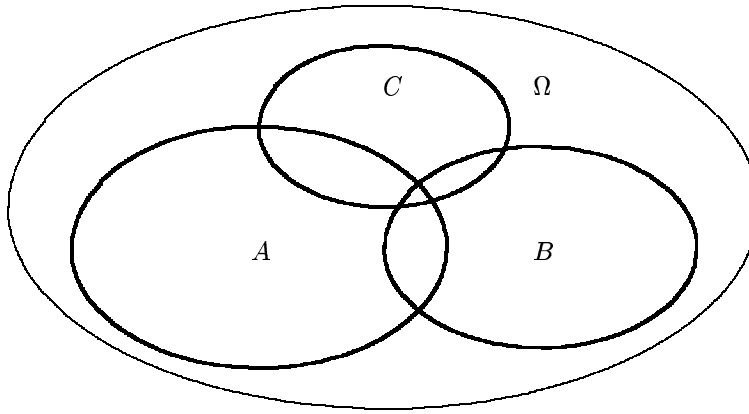


Рис. 2:

$$-P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ + P(A \cap B \cap C).$$

В частности, если события A, B, C попарно несовместны, то

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Последнее утверждение легко распространяется на случай любого конечного и даже счетного множества попарно несовместных событий: если при $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, то

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

Формула для вероятности объединения любого числа *совместных* событий более сложна, и мы ее не приводим.

1.4. Статистическая зависимость событий.

Условные вероятности

Пусть $A, B \subset \Omega$. Будем называть случайные события A и B *статистически независимыми* (обычно говорят короче – независимыми), если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Если $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, то события A и B называют (статистически) зависимыми.

Пример. Эксперимент состоит в бросании правильной игральной кости. Исходы – выпадение граней, помеченных цифрами от 1 до 6. Рассмотрим события: A – результат четный, B – результат больше двух, C – результат меньше четырех.

Здесь $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $P(\omega) = 1/6$, $\omega = 1, \dots, 6$;

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6\}, & P(A) &= 3 \cdot 1/6 = 1/2; \\ B &= \{3, 4, 5, 6\}, & P(B) &= 4 \cdot 1/6 = 2/3; \\ C &= \{1, 2, 3\}, & P(C) &= 3 \cdot 1/6 = 1/2; \\ A \cap B &= \{4, 6\}, & P(A \cap B) &= 2 \cdot 1/6 = 1/3; \\ A \cap C &= \{2\}, & P(A \cap C) &= 1/6. \end{aligned}$$

События A и B независимы, так как

$$P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 2/3 = 1/3 = P(A \cap B).$$

События A и C зависимы, так как

$$P(A) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \neq 1/6 = P(A \cap C).$$

Замечания. 1. Независимость (статистическая) событий A и B определена равенством $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, и не следует истолковывать ее каким-либо другим способом (отождествляя ее, например, с национальной, финансовой и т.п. независимостью).

2. В приложениях независимость (статистическая) обычно *постулируется постановщиком задачи* при построении математической модели. Такой постулат дает возможность легко находить вероятности пересечения событий. Однако за адекватность этого постулата реальности отвечает *постановщик задачи*, а не теория вероятностей.

Пусть теперь $A, B \subset \Omega$ и $P(A) \neq 0$. Тогда число $\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ называется *условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло*. Для условной вероятности принято обозначение

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \quad (1.4.1)$$

В отличие от *условной вероятности* $P(B|A)$ события B *вероятность* этого события $P(B)$ иногда называют *безусловной*.

Равенство (1.4.1) может быть переписано в виде

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Это утверждение носит название *теоремы умножения вероятностей*.

Покажем теперь, что переход к условной вероятности события равносильно изменению пространства элементарных событий. Пусть $A, B \subset \Omega$, и $P(A) \neq 0$ (рис.1.1). Слова "событие A произошло" означают, что эксперимент закончился одним из исходов (неизвестно каким), составляющих событие A . Поэтому можно *исключить из рассмотрения* все элементарные события, не входящие в A , т.е. считать A *новым* пространством элементарных событий $\Omega' = A$ (рис.1.3).

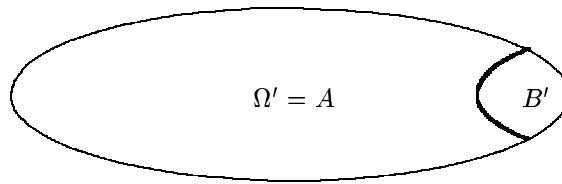


Рис. 3:

Если (что естественно) *сохранить соотношения* между вероятностями элементарных событий, т.е. изменить эти вероятности *пропорционально* ($P'(\omega) = k \cdot P(\omega)$), то сумма вероятностей всех элементарных событий, составляющих новое пространство, должна равняться единице. Отсюда

$$\sum_{\omega \in A} P'(\omega) = k \cdot \sum_{\omega \in A} P(\omega) = k \cdot P(A) = 1, \quad \text{т.е.} \quad k = \frac{1}{P(A)}.$$

Мы построили новое пространство элементарных событий $\Omega' = A$ с вероятностями элементарных событий

$$P'(\omega) = k \cdot P(\omega) = \frac{P(\omega)}{P(A)}.$$

В новом пространстве Ω' событию B исходного пространства соответствует событие $B' = B \cap A$ (рис.1.3), и

$$\begin{aligned} P'(B') &= \sum_{\omega \in B'} P'(\omega) = \sum_{\omega \in B'} \frac{P(\omega)}{P(A)} = \\ &= \frac{1}{P(A)} \cdot \sum_{\omega \in B \cap A} P(\omega) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B|A). \end{aligned}$$

Пример. Бросается правильная игральная кость. Найдём условную вероятность события "результат больше единицы" при условии, что выпала нечетная цифра.

Построим пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с равными вероятностями $P(\omega) \equiv 1/6$. Рассмотрим события $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ и $A \cap B = \{3, 5\}$. Их вероятности

$$P(A) = 3 \cdot 1/6 = 1/2, \quad P(B) = 5 \cdot 1/6 = 5/6, \quad P(A \cap B) = 2 \cdot 1/6 = 1/3.$$

Отсюда $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 2/3$.

Эту же задачу можно решить, рассмотрев пространство элементарных событий $\Omega' = \{1, 3, 5\}$. В этом пространстве каждому элементарному событию следует приписать вероятность $\mathbf{P}'(\omega) = \mathbf{P}(\omega)/\mathbf{P}(A) \equiv 1/3$. Тогда $B' = \{3, 5\}$, и $\mathbf{P}'(B') = 2 \cdot 1/3 = 2/3$.

1.5. Пространство элементарных событий с несчетным множеством исходов

Рассмотрим задачу об измерении некоторой физической величины с помощью стрелочного прибора. Если считать стрелку прибора не имеющей толщины, то результатом измерения (элементарным событием) может быть любая точка на шкале, и множество всех исходов Ω не является счетным. Можно показать, что в этом случае невозможно приписать каждому элементарному событию ненулевую вероятность и обеспечить при этом конечность $\mathbf{P}(\Omega)$.

В такой ситуации отказываются от приписывания вероятности каждому элементарному событию. Вероятность приписывается теперь только *событиям*, к которым относят *не любые* части Ω .

Точнее: пусть задано пространство элементарных событий Ω с несчетным числом исходов. Строится семейство \mathfrak{S} частей Ω , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\Omega \in \mathfrak{S}$;
- 2) если $A \in \mathfrak{S}$, то $\Omega \setminus A \in \mathfrak{S}$ (в частности, $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathfrak{S}$);
- 3) если $A_k \in \mathfrak{S}$ (набор этих множеств может быть конечным или счетным), то

$$\bigcap_k A_k \in \mathfrak{S} \quad \text{и} \quad \bigcup_k A_k \in \mathfrak{S}$$

(в частности, если $A, B \in \mathfrak{S}$, то $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathfrak{S}$).

Случайными событиями теперь называются не любые части Ω , а только входящие в \mathfrak{S} , и только им приписываются вероятности – неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям:

- 4) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- 5) если $A_k \in \mathfrak{S}$ (набор событий может быть конечным или счетным), и эти события попарно несовместны (не пересекаются), то

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mathbf{P}(A_k).$$

Замечание. Из свойств 4) и 5) следует, что для $A \in \mathfrak{S}$

$$\mathbf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

В частности, $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

Перечисленные выше пять свойств семейства \mathfrak{S} называются *аксиомами теории вероятностей*. Специалист-нематематик при построении модели эксперимента, использующей теорию вероятностей, вообще говоря, ограничен только этими аксиомами. Однако при измерении физической величины естественно считать, что семейство \mathfrak{S} содержит любые промежутки (сегменты, интервалы, полуинтервалы), целиком лежащие в множестве возможных значений этой величины. Тогда, согласно аксиоме 3, это семейство должно содержать также каждое множество, которое можно получить из промежутков с помощью конечного или счетного числа операций объединения и пересечения. Понятно, что все множества, представляющие хоть какой-нибудь практический интерес, попадут в такое семейство.

Пример. В случайный момент времени измеряется мгновенное значение синусоидального напряжения. Какова вероятность события "измеренное значение по модулю меньше половины амплитуды"?

Вследствие периодичности синусоиды *будем считать* пространством элементарных событий множество значений фазы – промежуток $[-\pi, \pi[$ (рис.1.4). Каждому промежутку, содержащемуся в $[-\pi, \pi[$, *припишем* вероятность, пропорциональную длине этого промежутка (так обычно интерпретируют в математической модели случайность момента времени). Тогда вероятность попадания в промежуток длины a будет равна $\frac{a}{2\pi}$ (независимо от того, входят граничные точки в промежуток или нет). Если событие состоит из нескольких непересекающихся промежутков, то, согласно аксиоме 3, вероятность этого события равна сумме длин этих промежутков, деленной на 2π .

На рис.1.4 выделены промежутки оси абсцисс, на которых выполняется условие $|u| < U_{max}/2$. Видно, что суммарная длина этих промежутков $4 \times \pi/6 = 2\pi/3$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(|u| < \frac{U_{max}}{2}\right) = \frac{2\pi/3}{2\pi} = 1/3.$$

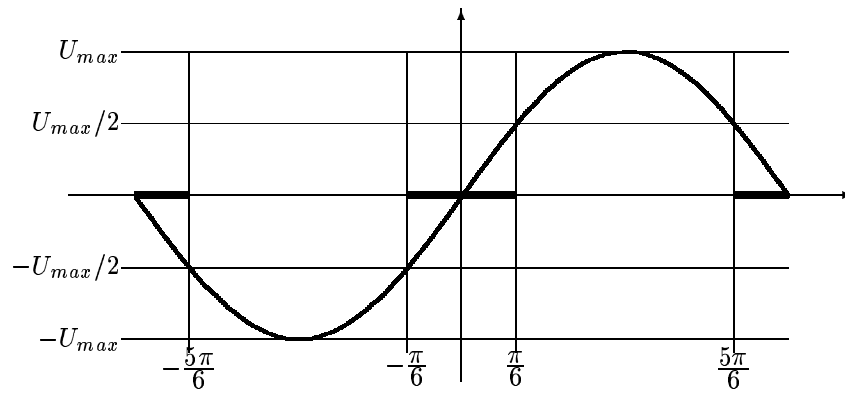


Рис. 4:

Замечание. Мы отождествили "событие" из содержательной задачи ($|u| < U_{max}/2$) и случайное событие – элемент семейства \mathfrak{S} :

$$]-\pi, -5\pi/6[\cup]-\pi/6, \pi/6[\cup]5\pi/6, \pi[.$$

Так поступают часто, чтобы сэкономить на записи.