

2. Глава 2. АЛГЕБРА МАТРИЦ

Матрицы, введенные нами для компактной записи систем линейных уравнений, имеют право и на самостоятельное существование. В этой главе мы рассмотрим операции над матрицами – матричную алгебру. Отметим сразу, что все операции матричной алгебры реализованы в средах конечного пользователя и в виде Фортран-программ.

2.1. Транспонирование и эрмитово сопряжение

Если A – столбец высоты n , то матрицу-строку ширины n , элементы которой равны соответствующим элементам A , называют *транспонированной по отношению к A* и обозначают A^T .

Если B – строка ширины n , то матрицу-столбец высоты n , элементы которой равны соответствующим элементам B , называют *транспонированной по отношению к B* и обозначают B^T .

Примеры.

$$\text{Если } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ то } A^T = [1 \quad 2 \quad 3]; \quad \text{если } B = [4 \quad 5], \text{ то } B^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Если A – $(m \times n)$ -матрица, то $(n \times m)$ -матрицу, столбцы которой равны соответствующим транспонированным строкам A (строки равны соответствующим транспонированным столбцам A), называют *транспонированной по отношению к A* и обозначают A^T .

$$a_{ij}^T = a_{ji}, \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример.

$$\text{Если } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица A , удовлетворяющая условию $A^T = A$, называется *симметричной*. Для симметричной матрицы порядка n выполнены равенства

$$a_{ij}^T = a_{ji} = a_{ij}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n).$$

Если транспонировать матрицу A , а затем заменить каждый ее элемент комплексно сопряженным ему числом, то получится матрица, которую называют *эрмитово¹ сопряженной* или просто *сопряженной по отношению к A* и обозначают A^* .

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}, \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример.

$$\text{Если } A = \begin{bmatrix} 1+2i & 4 \\ 2-i & 5+3i \\ 3 & 6-2i \end{bmatrix}, \text{ то } A^* = \begin{bmatrix} 1-2i & 2+i & 3 \\ 4 & 5-3i & 6+2i \end{bmatrix}.$$

Имеют место очевидные соотношения

$$(A^T)^T = A; \quad (A^*)^* = A.$$

Квадратную матрицу, удовлетворяющую условию $A^* = A$ называют *самосопряженной* или *эрмитовой*. Для эрмитовой матрицы

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji} = a_{ij}$$

(элементы, симметричные относительно диагонали, комплексно сопряжены). Отсюда, в частности, следует, что диагональные элементы эрмитовой матрицы вещественны.

¹Шарль ЭРМИТ (1822-1901) – французский математик, член Парижской АН, почетный член Петербургской АН.

2.2. Линейные операции над матрицами

Линейными операциями называют умножение матрицы на число и сложение матриц. Линейные операции выполняются *поэлементно*.

Если A – $(m \times n)$ -матрица, а α – число, то символом αA обозначают матрицу, получающуюся из A умножением каждого ее элемента на α .

$$B = \alpha A \iff b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример.

$$(-1.5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & -3.0 & -4.5 \\ -6.0 & -7.5 & -9.0 \end{bmatrix}.$$

Если A и B – $(m \times n)$ -матрицы *одного размера*, то их суммой называют матрицу, получающуюся сложением соответствующих элементов A и B .

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}.$$

Матрицы *разных размеров* складывать нельзя.

Из определений очевидны следующие свойства линейных операций над матрицами (матрицы A, B, C, Θ – одного размера!):

- 1) $B + A = A + B$;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3) $A + \Theta = \Theta + A = A$

(здесь Θ – *нулевая матрица*, т.е. матрица, все элементы которой – нули);

$$4) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

$$5) (A + B)^T = A^T + B^T; \quad (A + B)^* = A^* + B^*;$$

$$6) (\alpha A)^T = \alpha A^T; \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$$

(здесь α и β – числа).

2.3. Умножение матриц

Умножение матрицы на матрицу определим сначала для случая, когда *левый сомножитель* – строка ширины n , а *правый сомножитель* – столбец высоты n .

$$[a_1, \dots, a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n] = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n.$$

Произведение строки (слева) и столбца (справа) есть (1×1) -матрица, которую мы ранее договорились отождествлять с числом.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть левый сомножитель – A – имеет строки ширины n , а правый – B – столбцы высоты n . Тогда матрица-произведение $C = A \cdot B$ определяется так: элемент c_{ik} есть произведение i -й строки левого сомножителя на k -й столбец правого.

$$C = A \cdot B \iff c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{bmatrix}.$$

Замечание. Из определения следует, что произведение $(m \times p)$ -матрицы на $(p \times n)$ -матрицу есть $(m \times n)$ -матрица.

Матрицы, размеры которых *не согласованы*, т.е. ширина левой не равна высоте правой, перемножать нельзя!

Известно, что умножение *чисел*

а) коммутативно: $a \cdot b = b \cdot a$,

б) ассоциативно: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

в) дистрибутивно относительно сложения: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Покажем, что умножение *матриц*, вообще говоря, *не коммутативно*.

Во-первых, при изменении порядка сомножителей может нарушиться согласованность размеров. Например, если A – (3×4) -матрица, а B – (4×2) -матрица, то AB – (3×2) -матрица, а произведение BA не определено.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 60 \\ 114 & 140 \\ 178 & 220 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{произведение не определено.}$$

Во-вторых, даже если произведения двух матриц определены при любом порядке сомножителей, то размеры этих произведений могут быть различными. Так, например, если A – (2×4) -матрица, а B – (4×2) -матрица, то AB – (2×2) -матрица, а BA – (4×4) -матрица.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 60 \\ 114 & 140 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 17 & 20 \\ 23 & 30 & 37 & 44 \\ 35 & 46 & 57 & 68 \\ 47 & 62 & 77 & 92 \end{bmatrix}.$$

Наконец, произведения квадратных матриц одного порядка заведомо определены при любом расположении сомножителей и представляют собой квадратные матрицы того же порядка. Однако и в этом случае произведения могут зависеть от расположения сомножителей. Например:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В то же время можно привести примеры таких пар *квадратных* матриц, что $AB = BA$. В таком случае говорят, что матрицы A и B *коммутируют*. Например:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица, у которой все внедиагональные элементы равны нулю, называется *диагональной*. Мы будем писать

$$\text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Отметим, что умножение матрицы A на диагональную матрицу D *слева* приводит к умножению *строк* A на соответствующие (по номерам) элементы диагонали D , а умножение на D *справа* – к умножению на те же элементы *столбцов* A .

$$\begin{aligned} \text{diag}[2, 3, 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{diag}[2, 3] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица $I = \text{diag}[1, 1, \dots, 1]$ коммутирует с любой квадратной матрицей того же порядка, причем $A \cdot I = I \cdot A = A$. Именно на основании этих равенств матрица I называется *единичной*. Если необходимо указать порядок единичной матрицы, пишут I_n . Если A – $(m \times n)$ -матрица, то $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

Остальные два свойства умножения чисел – ассоциативность и дистрибутивность относительно сложения – верны и для матриц (конечно, при условии согласованности размеров). Докажем это.

Ассоциативность.

Пусть A имеет размер $(m \times n)$, B – $(n \times k)$ и C – $(k \times s)$. Тогда определены произведения

$$P = A \cdot B, \quad Q = B \cdot C, \quad U = P \cdot C = (A \cdot B) \cdot C, \quad V = A \cdot Q = A \cdot (B \cdot C)$$

(проверьте согласованность размеров!)

Докажем равенство матриц U и V , имеющих общий размер $(m \times s)$, рассмотрев их соответствующие элементы

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \sum_{r=1}^k p_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{t=1}^n a_{it} b_{tr} \right) c_{rj} = \sum_{r=1}^k \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tr} c_{rj}; \\ v_{ij} &= \sum_{t=1}^n a_{it} q_{tj} = \sum_{t=1}^n a_{it} \left(\sum_{r=1}^k b_{tr} c_{rj} \right) = \sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^k a_{it} b_{tr} c_{rj}; \end{aligned}$$

Видно, что u_{ij} и v_{ij} представляют собой суммы одних и тех же слагаемых и поэтому совпадают. Итак

$$\boxed{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).}$$

Дистрибутивность относительно сложения.

Пусть теперь A – матрица размера $(m \times n)$, а B и C – матрицы размера $(n \times k)$. Тогда определены произведения

$$R = A \cdot (B + C), \quad P = A \cdot B, \quad Q = A \cdot C.$$

Докажем, что, $R = P + Q$, т.е. что

$$\boxed{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.}$$

Действительно,

$$r_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}(b_{tj} + c_{tj}) = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj} + \sum_{t=1}^n a_{it}c_{tj} = p_{ij} + q_{ij}.$$

Точно так же доказывается равенство

$$(L + M) \cdot N = L \cdot N + M \cdot N,$$

где L, M, N – матрицы с согласованными размерами.

Взаимодействие умножения матриц с операциями транспонирования и эрмитова сопряжения задается соотношениями

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T; \quad (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*.$$

Проверьте эти равенства, обратив внимание на порядок сомножителей слева и справа.

В терминах умножения матриц может быть записана система линейных алгебраических уравнений. Пусть A – заданная числовая матрица размера $(m \times n)$, b – заданный числовой столбец высоты m , x – переменный столбец высоты n , т.е. $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, где x_1, \dots, x_n – числовые переменные. Тогда

$$Ax = b \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

есть краткая запись системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Мы можем также сказать, что решением системы $Ax = b$ называется такой числовой столбец, подстановка которого вместо переменного столбца x превращает *условное высказывание* $Ax = b$ в *истинное*.

2.4. Матричные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$AX = B, \tag{2.4.1}$$

где A – заданная числовая $(m \times n)$ -матрица, B – заданная числовая $(m \times p)$ -матрица, X – переменная $(n \times p)$ -матрица:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix}.$$

Решением этого уравнения называется такая числовая $(n \times p)$ -матрица, подстановка которой вместо переменной матрицы X превращает *условное высказывание* $AX = B$ в *истинное*.

Вспоминая правило умножения матриц, запишем уравнение (2.4.1) "по столбцам":

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}; \dots; A \cdot \begin{bmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1p} \\ \vdots \\ b_{mp} \end{bmatrix}. \tag{2.4.2}$$

Видим, что система линейных уравнений (1.1.1) есть частный случай матричного уравнения (2.4.1) при $p = 1$ и что матричное уравнение (2.4.1) равносильно p системам линейных уравнений.

Все системы в (2.4.2) имеют общую матрицу коэффициентов. Применяя к ним алгоритм Гаусса-Жордана мы будем многократно повторять одни и те же вычисления – отличие будет только при работе со свободными членами. Поэтому следует решать эти системы одновременно. Технология видна из приведенного ниже примера.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 14 & 6 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}.$$

Записываем расширенную матрицу (над чертой – номера столбцов).

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 17 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 20 & 9 \end{array}.$$

1-й шаг

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 17 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 20 & 9 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 4 & 2 & 1 & 17 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 14 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 20 & 9 \end{array} \iff$$

$$\iff \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 14 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 20 & 9 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}.$$

2-й шаг

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}.$$

3-й шаг

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array} \iff \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}.$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{Обратите внимание на порядок строк!}$$

Матричное уравнение

$$XA = B \tag{2.4.3}$$

приводят к виду (2.4.1), транспонируя обе его части:

$$A^T X^T = B^T.$$

Найдя описанным выше способом матрицу X^T , еще раз применяют операцию транспонирования:

$$X = (X^T)^T.$$

2.5. Обратная матрица

Определение. Если $A - (m \times n)$ -матрица, и существует такая $(n \times m)$ -матрица X , что $AX = I_m$ то X называют *правой обратной матрицей для A* . Аналогично, если существует такая $(n \times m)$ -матрица Y , что $YA = I_n$, то Y называют *левой обратной матрицей для A* . Заметим, что и левая и правая матрицы имеют одинаковый размер.

Покажем, что из существования у матрицы и левой и правой обратных следует их совпадение.

$$AX = I_m \vee YA = I_n \implies Y = YI_m = Y(AX) = (YA)X = I_nX = X. \quad (2.5.1)$$

В этом случае матрицу $X = Y$ называют обратной к A и обозначают A^{-1} , а саму матрицу A называют *обратимой*.

Пример. Решив матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = I_3, \quad \text{получим} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Убедитесь в том, что $XA = I_3$ и, следовательно, $X = A^{-1}$.

Если матрица A обратима, то решение матричного уравнения $AX = B$ существует, единственно и задается формулой

$$X = A^{-1}B. \quad (2.5.2)$$

Действительно, умножив (2.4.1) на A^{-1} слева, получим (2.5.2), умножив же (2.5.2) на A слева, получим (2.4.1).

Аналогично, если A обратима, то решение матричного уравнения $XA = B$ существует, единственно и задается формулой

$$X = BA^{-1}. \quad (2.5.3)$$

Если матрица A обратима, то обратимы и матрицы A^{-1} , A^T , A^* . Убедитесь в справедливости равенств

$$(A^{-1})^{-1} = A; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Покажем теперь, что неквадратная матрица не может иметь обратной (но может иметь левую либо правую обратную).

Пусть $A - (m \times n)$ -матрица и $m < n$. Применим метод Гаусса-Жордана к уравнению $AX = I_m$. Поскольку число переменных в процессе исключения не меняется, а число уравнений разве что уменьшается, решение единственным быть не может – A необратима.

Если $m > n$, то такое же рассуждение показывает, что необратима $(n \times m)$ -матрица A^T , а, следовательно необратима и A .

Итак, обратимыми могут быть только квадратные матрицы. Условия обратимости квадратных матриц будут получены в п.3.4.

Серьезное предупреждение. Может создаться впечатление, что для решения матричного уравнения $AX = B$ нужно найти матрицу A^{-1} и воспользоваться формулой (2.5.2). На самом деле этот путь бессмыслен, так как для нахождения обратной матрицы все равно нужно решить матричное уравнение $AX = I$. Более того, матрица может быть необратимой, а уравнение $AX = B$ – все-таки разрешимым. Поэтому формулы (2.5.2) и (2.5.3) применяются для теоретических построений и *никогда не используются в вычислениях*.

2.6. Сведение комплексного матричного уравнения к вещественному

Рассмотрим матричное уравнение

$$CZ = W. \quad (2.6.1)$$

Здесь $C = A + iB$ – заданная *комплексная* $(m \times n)$ -матрица, $W = U + iV$ – заданная *комплексная* $(m \times p)$ -матрица и $Z = X + iY$ – переменная *комплексная* $(n \times p)$ -матрица, а A, B, U, V, X, Y – вещественные матрицы соответствующих размеров.

Перепишем (2.6.1) в виде

$$(A + iB) \cdot (X + iY) = U + iV. \quad (2.6.2)$$

Приравнивая по отдельности вещественные и мнимые части уравнений (2.6.2), получим систему *вещественных* матричных уравнений

$$\begin{cases} AX - BY = U \\ BX + AY = V \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что эта система равносильна одному матричному уравнению

$$\left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}, \quad (2.6.3)$$

которое называют овеществлением уравнения (2.6.1).

Заметим, что работать с уравнением (2.6.1) выгоднее, чем с (2.6.3), так как оно требует в два раза меньше оперативной памяти ЭВМ. Однако программы, работающие с комплексными уравнениями, к сожалению, до сих пор встречаются у нас реже, чем потребность в них.