

Глава 6. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

6.1. Основные понятия

Пусть A – матрица размера $(m \times n)$. Умножение вектора из \mathbb{C}^n на эту матрицу слева дает вектор из \mathbb{C}^m . Таким образом, можно сказать, что $(m \times n)$ -матрица A порождает отображение линейного пространства \mathbb{C}^n в линейное пространство \mathbb{C}^m :

$$x \longrightarrow Ax.$$

Отметим два важных свойства этого отображения.

1. Образ суммы двух векторов есть сумма их образов.

$$A(x^{(1)} + x^{(2)}) = Ax^{(1)} + Ax^{(2)}.$$

2. При умножении вектора на число его образ умножается на то же число

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax).$$

Свойства 1 и 2 можно объединить.

Для любых векторов $x^{(1)}, x^{(2)}$ и для любых чисел α_1, α_2

$$A(\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}) = \alpha_1 Ax^{(1)} + \alpha_2 Ax^{(2)}.$$

Отображения, обладающие этим свойством, называются *линейными* (сравните со свойством 3 определителя матрицы, п.3.2). Итак, матрица порождает *линейное отображение* \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m (*линейный оператор*, действующий из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m).

Заметим, что если A $(m \times n)$ -матрица с *вещественными* элементами и $x \in \mathbb{R}^n$, то $Ax \in \mathbb{R}^m$, т.е. вещественная матрица порождает линейный оператор, действующий из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m .

Если A – квадратная матрица, то она порождает отображение линейного пространства в себя. Рассмотрим пример такого отображения. Пусть $n = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$Ay = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot x.$$

Видно (рис.6.1), что умножение вектора y на матрицу A не только "растягивает" соответствующий этому вектору направленный отрезок \overrightarrow{y} , но и "поворачивает" его, в то время как направленные отрезки \overrightarrow{x} и \overrightarrow{Ax} коллинеарны.

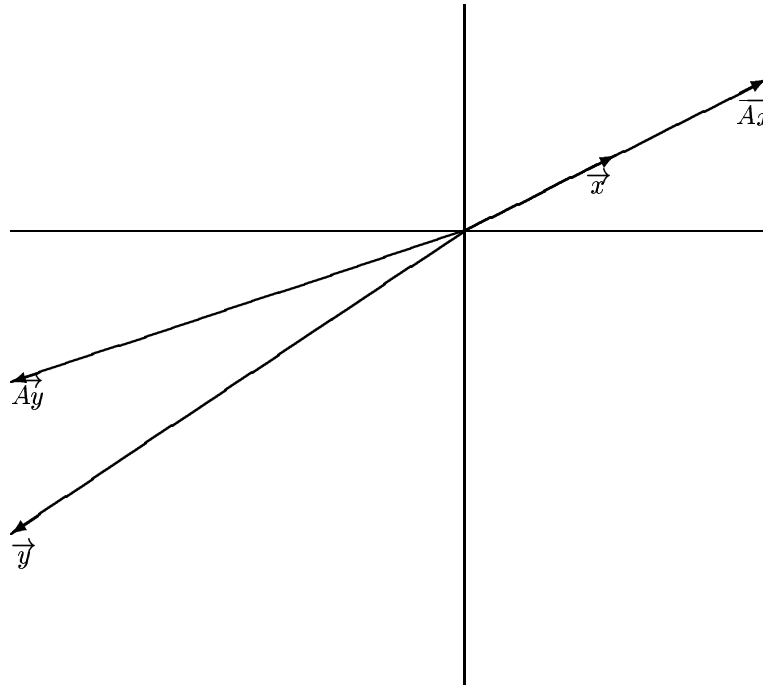


Рис.6.1

Определение. Пусть A – квадратная $(n \times n)$ -матрица. Если для некоторого числа λ и некоторого *ненулевого* вектора $x \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство

$$Ax = \lambda x, \quad (6.1.1)$$

то λ называется *собственным числом* (или *собственным значением*) матрицы A , а x – *собственным вектором* этой матрицы, *соответствующим собственному числу* λ .

Замечания. 1. В случае, когда речь идет о собственных числах нескольких матриц, например A и B , целесообразно использовать обозначения $\lambda(A)$ и $\lambda(B)$.

2. Условие $x \neq \theta$ для собственного вектора существенно, так как $A\theta = \lambda\theta$ при *любом* λ , и этот случай не представляет интереса.

6.2. Полная проблема собственных значений

Полной проблемой собственных значений называют задачу о нахождении всех собственных чисел и собственных векторов квадратной матрицы. Эта задача наряду с задачей о решении системы линейных уравнений составляет основное содержание линейной алгебры.

Преобразуем уравнение (6.2.1), определяющее собственные числа и соответствующие им собственные векторы.

$$Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = \theta \iff (A - \lambda I)x = \theta. \quad (6.2.1)$$

(6.2.1) – система из n уравнений (*нелинейных*) с $(n + 1)$ переменными: x_1, \dots, x_n и еще λ !

Заметим, однако, что при фиксированном λ эта система становится линейной и однородной, и, следовательно, существование у нее ненулевых решений равносильно вырожденности матрицы ее коэффициентов. Итак, собственные числа матрицы A – это в точности все корни уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (6.2.2)$$

Исследуем это уравнение. Как известно, определитель матрицы вычисляется через ее элементы с помощью операций умножения и сложения. С другой стороны, элементы матрицы $A - \lambda I$ – это полиномы относительно λ . Следовательно, $\det(A - \lambda I)$ – тоже полином относительно λ . Он называется *характеристическим полиномом матрицы* A , и мы будем обозначать его $P_A(\lambda)$.

Примеры. 1. $n = 1$, $A = [a_{11}]$, $P_A(\lambda) = \det([a_{11} - \lambda]) = a_{11} - \lambda$.

$$\begin{aligned} 2. n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad P_A(\lambda) &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det(A) - Sp(A) \cdot \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

(здесь $Sp(A)$ – *след матрицы* – сумма ее диагональных элементов).

$$3. n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad P_A(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det(A) - (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \cdot \lambda + Sp(A) \cdot \lambda^2 - \lambda^3$$

(здесь A_{kk} , $k = 1, 2, 3$ – алгебраические дополнения диагональных элементов матрицы).

Можно показать, что для квадратной матрицы A порядка n характеристический полином имеет степень n , причем старший коэффициент его равен $(-1)^n$, свободный член равен $\det(A)$, а коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1} \cdot Sp(A)$.

Приведем без доказательства некоторые свойства корней полинома.

1. Всякий полином степени $n \geq 1$ может быть разложен на множители:

$$p_0 + p_1 \lambda + \dots + p_n \lambda^n \equiv p_n \cdot ((\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}).$$

Здесь числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – *попарно различные* корни полинома, а натуральные числа k_1, \dots, k_m – их *кратности*. При этом $k_1 + \dots + k_m = n$, т.е. полное количество корней полинома (с учетом их кратности) равно степени полинома.

2. Сумма всех корней полинома (с учетом их кратности) равна $-\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)$, а произведение равно $(-1)^n \left(\frac{p_0}{p_n}\right)$.

Эти свойства позволяют сформулировать ряд содержательных утверждений о собственных числах матрицы:

1. Каждая квадратная матрица порядка n имеет (с учетом возможной кратности) ровно n собственных чисел.

Замечание. Под словом *числа* понимаются, как всегда, *комплексные числа*. Даже у вещественной матрицы может не быть вещественных собственных чисел. Например:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_n(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 1.$$

2. Сумма всех (с учетом их кратности) собственных чисел матрицы равна ее следу. Произведение же всех собственных чисел матрицы равно ее определителю.

$$\sum_{r=1}^n \lambda_r(A) = Sp(A), \quad \prod_{r=1}^n \lambda_r(A) = \det(A).$$

Следствие. Вырожденность матрицы равносильна наличию у нее нулевого собственного числа.

Остановимся теперь на вопросе о количестве собственных векторов матрицы. Прежде всего отметим, что умножив собственный вектор на *отличное от нуля* число, получим собственный вектор:

$$x \neq \theta \bigwedge Ax = \lambda x \bigwedge \alpha \neq 0 \implies \alpha x \neq \theta \bigwedge A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x).$$

Поэтому имеет смысл говорить не о количестве собственных векторов матрицы вообще, а лишь о количестве ее *линейно независимых* собственных векторов.

Имеет место следующая важная

Теорема. Собственные векторы матрицы, соответствующие ее *попарно различным* собственным числам, линейно независимы.

Доказательство. Пусть $k \leq n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – попарно различные собственные числа $(n \times n)$ -матрицы A , а $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ – соответствующие им собственные векторы.

Составим уравнение

$$\alpha_1 x^{(1)} + \dots + \alpha_k x^{(k)} = \theta \tag{6.2.3}$$

и покажем, что оно имеет только нулевое решение.

Умножим (6.2.3) слева на матрицу A . По определению собственных векторов получим

$$\alpha_1 \lambda_1 x^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \alpha_k \lambda_k x^{(k)} = \theta. \tag{6.2.4}$$

С другой стороны, умножая обе части (6.2.3) на λ_1 , имеем

$$\alpha_1 \lambda_1 x^{(1)} + \alpha_2 \lambda_1 x^{(2)} + \dots + \alpha_k \lambda_1 x^{(k)} = \theta.$$

Вычитание полученного равенства из (6.2.4) дает

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)x^{(2)} + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)x^{(k)} = \theta. \quad (6.2.5)$$

Количество слагаемых в левой части (6.2.5) уменьшилось по сравнению с (6.2.3) на единицу. Умножая (6.2.5) слева на матрицу A , затем на λ_2 и вычитая из первого произведения второе, уменьшим количество слагаемых в левой части еще на единицу. Повторяя этот прием, придем к равенству

$$\alpha_k((\lambda_k - \lambda_1) \cdot (\lambda_k - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda_{k-1}))x^{(k)} = \theta,$$

из которого, учитывая, что собственные числа попарно различны и $x^{(k)} \neq \theta$, получим, что $\alpha_k = 0$.

Так как порядок собственных векторов в уравнении (6.2.3) произволен, мы показали, на самом деле, что равны нулю все числа α_r ($r = 1, \dots, k$), и линейная независимость собственных векторов, соответствующих попарно различным собственным числам, доказана.

Эта теорема имеет важное

Следствие. Если все n собственных чисел $(n \times n)$ -матрицы A попарно различны, то соответствующие им собственные векторы образуют базис в \mathbb{C}^n . Его принято называть *собственным базисом* матрицы A .

Вопрос о существовании собственного базиса в случае наличия кратных корней характеристического полинома (кратных собственных чисел матрицы) оказывается более сложным.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Характеристические полиномы у этих матриц совпадают

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 \quad P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2.$$

Итак, обе матрицы имеют собственные числа двойной кратности. Но у матрицы A есть собственный базис (например, стандартный — $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$). А вот у матрицы B есть (с точностью до числового множителя) только один собственный вектор. Действительно, решая систему

$$(B - 2I)x = \theta \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{получим} \quad x = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\gamma \neq 0).$$

Однако еще Григорий Сковорода¹ сказал: "Слава Создателю, сотворившему все ненужное трудным, а все трудное — ненужным". Наиболее часто встречающийся в приложениях класс *самосопряженных* матриц избавлен от отмеченных сложностей. У самосопряженных матриц, как будет показано в п.8.1, всегда есть собственный базис.

Теперь мы можем закончить рассмотрение примера, с которого начинается эта глава.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -6 \\ 3 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Собственные числа матрицы A : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Находим соответствующие им собственные векторы, решая однородные системы линейных уравнений

$$(A - \lambda_r)x^{(r)} = \theta, \quad r = 1, 2.$$

$$r = 1; \quad \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x^{(1)} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где γ_1 — произвольное, отличное от нуля число. (Отметим, что при $\gamma_1 = 1$ мы получаем уже упоминавшийся в п.6.1 собственный вектор).

$$r = 2; \quad \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x^{(2)} = \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 \neq 0.$$

¹Григорий Саввич Сковорода (1722-1794) — украинский философ, поэт, педагог, вел жизнь странствующего нищего. Его сочинения распространялись в списках.

Векторы $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ образуют собственный базис матрицы A .

Итак, построен алгоритм решения полной проблемы собственных значений для квадратной матрицы с простыми (попарно различными) собственными числами:

1. Вычислить коэффициенты характеристического полинома

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

2. Найти корни этого полинома $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A .

3. Для каждого собственного числа λ_r ($r = 1, \dots, n$) найти соответствующий собственный вектор $x^{(r)}$ – ненулевое решение однородной линейной системы

$$(A - \lambda_r I)x^{(r)} = 0.$$

Серьезное предупреждение. Этот, казалось бы, естественный алгоритм обладает одним убийственным недостатком: не существует численно устойчивых методов его реализации. Поэтому на практике используют другие методы решения полной проблемы собственных значений.

Отметим еще некоторые свойства собственных векторов и собственных чисел матрицы.

1. Если матрицу умножить на отличное от нуля число, то ее собственные векторы не изменятся, а собственные числа умножатся на это же число.

Доказательство.

$$Ax = \lambda x \iff (\alpha A)x = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x.$$

2. Если матрица A обратима, то собственные векторы матриц A и A^{-1} совпадают, а их собственные числа взаимно обратны.

Доказательство. Из обратимости A следует, что $\det(A) \neq 0$ и, таким образом, все собственные числа отличны от нуля. Далее

$$Ax = \lambda x \iff A^{-1}Ax = A^{-1}(\lambda x) = \lambda(A^{-1}x) \iff x = \lambda(A^{-1}x) \iff A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x.$$

3. Собственные векторы сопряженных квадратных матриц – сопряженные комплексные числа.

Доказательство.

$$P_{A^*}(\bar{\lambda}) = \det(A^* - \bar{\lambda}I) = \det(A - \lambda I)^* = \overline{\det(A - \lambda I)} = \overline{P_A(\lambda)}.$$

Поэтому если $P_A(\lambda) = 0$, то $\overline{P_A(\lambda)} = 0$ и $P_{A^*}(\bar{\lambda}) = 0$.

Замечание. В отличие от взаимно обратных матриц собственные векторы эрмитово сопряженных матриц, вообще говоря, никак между собой не связаны.

6.3. Подобные матрицы

Определение. Говорят, что квадратная матрица A подобна квадратной матрице B , если существует такая обратимая матрица S , что

$$A = S^{-1}BS.$$

Очевидно, что если A подобна B , то и B подобна A , так как

$$A = S^{-1}BS \iff B = SAS^{-1} = (S^{-1})^{-1}BS^{-1}.$$

Поэтому говорят, что матрицы A и B подобны друг другу. Очевидно также, что всякая квадратная матрица подобна самой себе. Далее, если A подобна B и B подобна C , то A подобна C . Действительно,

$$A = S_1^{-1}BS_1 \bigwedge B = S_2^{-1}CS_2 \iff A = S_1^{-1}S_2^{-1}CS_2S_1 = (S_2S_1)^{-1}C(S_2S_1).$$

Рассмотрим теперь свойства собственных чисел подобных матриц.

Теорема. Характеристические полиномы подобных матриц совпадают.

Доказательство. Если $A = S^{-1}BS$, то

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(S^{-1}BS - \lambda I) =$$

$$\begin{aligned}
&= \det(S^{-1}BS - S^{-1}IS) = \det(S^{-1}(B - \lambda I)S) = \\
&= \det(S^{-1}) \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(S) = \det(B - \lambda I) = P_B(\lambda).
\end{aligned}$$

Следствие. Собственные числа подобных матриц попарно совпадают.

Для дальнейшего большое значение имеет следующая

Теорема. Если у матрицы есть собственный базис, то среди подобных ей есть диагональная.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A , $s^{(1)}, \dots, s^{(n)}$ – соответствующие им линейно независимые собственные векторы. Тогда

$$As^{(r)} = \lambda_r s^{(r)}, \quad r = 1, \dots, n.$$

Перепишем эту систему равенств в матричной форме

$$AS = S\Lambda, \tag{6.3.1}$$

где $S = [s^{(1)}, \dots, s^{(n)}]$, $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

(Обратите внимание на порядок сомножителей в правой части (6.3.1)).

Так как векторы $s^{(1)}, \dots, s^{(n)}$ образуют базис, матрица S обратима. Домножив (6.3.1) слева на S^{-1} , получим $S^{-1}AS = \Lambda$.

Верно и обратное утверждение: если среди матриц, подобных матрице A , есть диагональная, то на ее диагонали стоят собственные числа матрицы A , и у A есть собственный базис.

Действительно, $S^{-1}AS = \Lambda \implies AS = S\Lambda$, т.е. $As^{(r)} = \lambda_r s^{(r)}$, $r = 1, \dots, n$. Таким образом, λ_r – собственные числа матрицы A , а $s^{(r)}$ – ее собственные векторы. Осталось заметить, что в силу обратимости матрицы S ее столбцы – собственные векторы матрицы A – образуют базис.