

Глава 7. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

7.1. Определение и свойства скалярного произведения

Определение. Скалярным произведением векторов $x \in \mathbb{C}^n$ (левый сомножитель) и $y \in \mathbb{C}^n$ (правый сомножитель) называется число, которое обозначается $\langle x, y \rangle$ и находится по правилу

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n = \sum_{r=1}^n x_r \bar{y}_r.$$

Скалярное произведение векторов (однострочных матриц) можно записать и в терминах матричного умножения:

$$\langle x, y \rangle = y^* x.$$

Рассмотрим свойства скалярного произведения.

$$\langle x, x \rangle = \sum_{r=1}^n x_r \bar{x}_r = \sum_{r=1}^n |x_r|^2 \geq 0.$$

Скалярный квадрат нулевого вектора равен, очевидно, нулю. С другой стороны, если сумма неотрицательных чисел – квадратов модулей координат вектора – равна нулю, то все координаты равны нулю, т.е. вектор – нулевой.

1. Скалярный квадрат любого вектора – вещественное неотрицательное число.
 $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta.$

$$\langle y, x \rangle = y_1 \bar{x}_1 + \dots + y_n \bar{x}_n = \overline{\bar{y}_1 x_1} + \dots + \overline{\bar{y}_n x_n} = \overline{x_1 \bar{y}_1} + \dots + \overline{x_n \bar{y}_n} = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

2. При изменении порядка сомножителей скалярное произведение векторов заменяется на сопряженное комплексное число.
 $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta.$

Вычислением обеих частей равенств доказывается, что

3. Скалярное произведение линейно относительно *левого* сомножителя.
 $\alpha \in \mathbb{C} \implies \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle; \quad \langle (x + y), z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$

Замечания. 1. Относительно правого сомножителя скалярное произведение линейным не является. Действительно

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle y, x \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

2. Как известно из школьного курса, скалярное произведение векторов в \mathbb{R}^3 равно произведению длин соответствующих им направленных отрезков и косинуса угла между этими отрезками

$$\langle x, y \rangle = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\angle \vec{x}, \vec{y}).$$

3. В конечномерных линейных пространствах, отличных от \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n , можно ввести скалярное произведение, сопоставив каждой упорядоченной паре векторов x, y ("природа" которых не играет роли) число, обозначаемое $\langle x, y \rangle$. Свобода "назначения" этого числа ограничена следующими *аксиомами скалярного произведения*, которые были проверены выше для \mathbb{C}^n .

$$1. \langle x, x \rangle \geq 0; \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta.$$

$$2. \alpha \in \mathbb{C} \implies \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle; \quad 3. \langle (x + y), z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Убедившись в выполнении этих аксиом, можно использовать все результаты построенной теории. Пример скалярного произведения в пространстве полиномов будет рассмотрен в п.11.3.

4. Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется *унитарным* пространством, вещественное – *евклидовым*.

Докажем еще два важных свойства скалярного произведения.

Если $x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$ и $A - (m \times n)$ -матрица, то, записывая скалярное произведение в терминах умножения матриц, получим

$$\langle x, A^* y \rangle = (A^* y)^* x = y^* A^{**} x = y^* A x = \langle A x, y \rangle.$$

$$\boxed{4. \langle x, A^* y \rangle = \langle A x, y \rangle.}$$

Для любых двух векторов $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\boxed{5. |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.}$$

Это неравенство называют *неравенством Коши-Буняковского-Шварца*¹ (КБШ). Докажем его.

Если $y = \theta$, то $|\langle x, \theta \rangle|^2 = 0 = \langle x, x \rangle \cdot \langle \theta, \theta \rangle$.

Если $y \neq \theta$, то обозначим для краткости $\langle y, y \rangle = \beta > 0$, $\langle x, y \rangle = \gamma$ и распишем скалярный квадрат вектора, используя аксиомы:

$$\begin{aligned} \langle \beta x - \gamma y, \beta x - \gamma y \rangle &= \beta^2 \langle x, x \rangle - \beta \bar{\gamma} \langle x, y \rangle - \gamma \bar{\beta} \langle y, x \rangle + \gamma \bar{\gamma} \langle y, y \rangle = \\ &= \beta^2 \langle x, x \rangle - \beta \bar{\gamma} \gamma - \gamma \bar{\beta} \beta + \gamma \bar{\gamma} \beta = \beta (\beta \langle x, x \rangle - \bar{\gamma} \gamma) = \\ &= \beta (\langle y, y \rangle \cdot \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2). \end{aligned}$$

В силу аксиомы 1 это выражение неотрицательно. Деля его на *положительное* число β , получаем доказываемое неравенство

В \mathbb{R}^3 неравенство КБШ становится тривиальным. Действительно, если x и y – ненулевые векторы, то

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \iff |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \cdot \cos^2(\angle \vec{x}, \vec{y}) \leq |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \iff \cos^2(\angle \vec{x}, \vec{y}) \leq 1$$

7.2. Норма вектора

Известно, что в \mathbb{R}^3 $\langle x, x \rangle = |\vec{x}|^2$ или $|\vec{x}| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, т.е. длина направленного отрезка равна корню квадратному из скалярного квадрата соответствующего вектора. Поскольку скалярный квадрат неотрицателен и для векторов из \mathbb{C}^n , можно ввести *норму вектора* – обобщение понятия длины направленного отрезка.

Определение. Нормой вектора называется число, которое обозначается $\|x\|$ и находится по правилу

$$\boxed{\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.}$$

Используя понятие нормы, можно записать неравенство КБШ в виде

$$\boxed{|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.}$$

Рассмотрим свойства нормы.

Из аксиом скалярного произведения следует, что

$$\boxed{1. \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \iff x = \theta.}$$

Отметим, что работать удобнее не с нормой, а с ее квадратом.

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2.$$

$$\boxed{2. \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.}$$

Определение. Вектор, норма которого равна единице, называется *нормированным*.

Любой *ненулевой* вектор можно нормировать, разделив его на его собственную норму:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1.$$

В силу аксиом скалярного произведения

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

Учтем теперь, что модуль суммы двух чисел не превышает сумму модулей слагаемых. При этом у заведомо неотрицательных чисел знак модуля опустим.

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2.$$

Учитывая, что $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, получим

$$3. \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Итак,

$$\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|}.$$

Для случая \mathbb{R}^3 это неравенство известно: длина стороны треугольника не больше суммы длин остальных его сторон. По этой причине доказанное для произвольного унитарного пространства неравенство называют *неравенством треугольника*.

Замечания 1. Введенная нами норма вектора называется обычно *евклидовой нормой* или *нормой*, порожденной скалярным произведением.

В \mathbb{C}^n можно задать другие неотрицательные функционалы, обладающие свойствами евклидовой нормы. Все они также называются нормами. Кроме евклидовой, обозначаемой $\|x\|_2$, чаще всего используются следующие две нормы

$$\boxed{\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|; \quad \|x\|_\infty = \max_r (|x_r|)}.$$

Проверьте выполнение свойств, доказанных для евклидовой нормы.

2. Как и скалярное произведение норма может быть введена в произвольном линейном пространстве: каждому вектору ставится в соответствие неотрицательное вещественное число – норма этого вектора. "Свобода назначения" нормы ограничивается лишь обязательностью выполнения трех свойств, которые для евклидовой нормы в \mathbb{C}^n были доказаны, а теперь выступают в роли аксиом нормы. После проверки выполнения аксиом могут использоваться все выводы построенной теории.

7.3. Матрица Грама

Пусть A – произвольная $(m \times n)$ -матрица. Рассмотрим квадратную $(m \times m)$ -матрицу $G_A = A^*A$. По определению произведения матриц

$$(g_A)_{km} = \sum_{r=1}^n a_{kr}^* a_{rm} = \sum_{r=1}^n a_{rm} \overline{a_{rk}}.$$

Если обозначить, как принято, k -й столбец матрицы A $a^{(k)} \in \mathbb{C}^m$, то элементы матрицы можно записать в терминах скалярного произведения

$$(g_A)_{km} = \langle a^{(m)}, a^{(k)} \rangle.$$

Таким образом, матрица G_A содержит все попарные скалярные произведения векторов – столбцов матрицы A .

Эта матрица называется *матрицей Грама*² упорядоченного набора векторов $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$.

²Йорген Грам (1850-1916) – датский математик.

Рассмотрим свойства матрицы Грама.

1. Матрица Грама для любого набора векторов – самосопряженная:

$$G_A^* = (A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A = G_A.$$

2. Линейная зависимость набора векторов равносильна вырожденности его матрицы Грама.

Доказательство. Пусть набор векторов $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ линейно зависим. Тогда имеет ненулевое решение однородное матричное уравнение $Ax = \theta_m$. Умножив это уравнение слева на A^* , получим $A^*Ax = A^*\theta_m$ или $G_Ax = \theta_m$, – однородное уравнение с ненулевым решением. Следовательно, G_A – вырожденная.

Пусть теперь дано, что $\det(G_A) = 0$. Тогда однородное уравнение $G_Ax = \theta_n$ будет иметь ненулевое решение. Обозначим его \tilde{x} и умножим равенство $G_A\tilde{x} = \theta_n$ на \tilde{x} скалярно (справа):

$$\langle G_A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle = 0 \iff \langle A^*A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle = 0 \iff \langle A\tilde{x}, A\tilde{x} \rangle = 0 \iff A\tilde{x} = \theta.$$

Мы получили однородную систему с ненулевым решением, что и доказывает линейную зависимость столбцов матрицы A . (Заметьте, что было использовано доказанное в п.7.1 равенство $\langle A^*A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle = \langle A\tilde{x}, A\tilde{x} \rangle$).

7.4. Ортогональность векторов

Определение. Векторы x, y унитарного пространства называются *ортогональными*, если $\langle x, y \rangle = 0$. Множество векторов называется ортогональным если все его векторы попарно ортогональны.

Замечание. В \mathbb{R}^3 ортогональным *ненулевым* векторам соответствуют перпендикулярные направленные отрезки.

Рассмотрим некоторые свойства ортогональных векторов.

1. Нулевой вектор ортогонален любому вектору: $\langle x, \theta \rangle = 0$.

2. Матрица Грама ортогонального набора векторов диагональна, так как

$$(g_A)_{km} = \langle a^{(M)}, a^{(k)} \rangle = \delta_{km} \cdot \|a^{(k)}\|^2 \implies G_A = \text{diag}[\|a^{(1)}\|^2, \dots, \|a^{(k)}\|^2].$$

3. Если ортогональный набор векторов линейно зависим, то он содержит нулевой вектор. Действительно, определитель диагональной матрицы Грама равен произведению ее диагональных элементов – квадратов норм векторов нашего набора. Но по свойству 2 матрицы Грама этот определитель для линейно зависимого набора векторов равен нулю. Следовательно, квадрат нормы хотя бы одного из векторов набора равен нулю, что и требовалось доказать.

Следующее свойство настолько важно, что ему придается ранг теоремы.

Теорема. Любое ортогональное множество векторов в \mathbb{C}^n , не содержащее нулевого вектора, может быть дополнено до ортогонального базиса.

Доказательство. Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ – ортогональный и не содержащий нулевого вектора набор векторов. Если $k = n$, то этот набор уже является базисом. Если же $k < n$, то построим еще один ненулевой вектор, ортогональный уже имеющемуся набору.

Записывая условия ортогональности искомого вектора всем векторам набора, получим систему из k уравнений с n переменными

$$\langle x, a^{(1)} \rangle = 0, \dots, \langle x, a^{(k)} \rangle = 0,$$

имеющую, как известно, ненулевое решение. Обозначив его $a^{(k+1)}$, получаем ортогональный по построению и не содержащий нулевого вектора набор из $k+1$ векторов.

Повторяя, если нужно, эту операцию, получим ортогональный базис \mathbb{C}^n .

Замечание. Разложение вектора b в \mathbb{C}^n по базису $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ сводится, как известно, к решению системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей коэффициентов

$$x_1 a^{(1)} + \dots + x_n a^{(n)} = b \iff Ax = b. \quad (7.4.1)$$

Умножив в случае *ортогонального* базиса обе части матричного уравнения (7.4.1) на A^* слева, получим равносильную систему с диагональной матрицей Грама.

$$G_A x = A^* b.$$

Решение этой системы имеет вид

$$x_k = \frac{(a^{(k)})^* b}{\|a^{(k)}\|^2} = \frac{\langle b, a^{(k)} \rangle}{\|a^{(k)}\|^2}; \quad k = 1, \dots, n$$

и требует выполнения существенно меньшего ($\approx 2n^2$) количества арифметических операций, чем в общем случае ($\approx n^3/3$).

7.5. Унитарная матрица

Определение. Ортогональный набор нормированных векторов называется *ортонормированным*.

Определение. Квадратная матрица, столбцы которой образуют ортонормированный набор, называется *унитарной*. *Вещественная* унитарная матрица называется *ортогональной*.

Рассмотрим свойства унитарной матрицы (в этом пункте будем обозначать ее U).

1. $G_U = U^*U = I$. Это свойство равносильно определению.

2. Из (1) следует, что $U^* = U^{-1}$ – для унитарной матрицы сопряженная совпадает с обратной и, следовательно, тоже унитарна.

3. Умножение векторов из \mathbb{C}^n на унитарную матрицу не меняет их скалярных произведений и, следовательно, норм:

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle U^*Ux, y \rangle = \langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

4. Если V – унитарная матрица того же порядка, что U , то их произведение – унитарная матрица:

$$(UV)^*(UV) = V^*(U^*U)V = V^*V = I.$$

5. Модули всех собственных чисел унитарной матрицы равны единице и, следовательно, модуль ее определителя (произведения всех собственных чисел матрицы) равен единице:

$$Ux = \lambda x \implies \|Ux\| = |\lambda|\|x\| \implies \|x\| = |\lambda|\|x\| \implies |\lambda| = 1.$$

6. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам унитарной матрицы, ортогональны:

Если $Ux = \lambda x$; $Uy = \mu y$, то (по свойству 3) $\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = \langle \lambda x, \mu y \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle x, y \rangle$, т.е. $(1 - \lambda \bar{\mu}) \langle x, y \rangle = 0$.

Но, по свойству (5) $|\mu| = 1$, т.е. $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu}$. По условию $\lambda \neq \mu$. Итак, $\lambda \bar{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1$ и $(1 - \lambda \bar{\mu}) \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle x, y \rangle = 0$.

Примеры. 1. Рассмотрим матрицу 2-го порядка

$$U_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Очевидны равенства $\|u_\varphi^{(1)}\| = \|u_\varphi^{(2)}\| = 1$, $\langle u_\varphi^{(1)}, u_\varphi^{(2)} \rangle = 0$. Следовательно, эта матрица унитарна.

2. Пусть x – ненулевой вектор в \mathbb{R}^2 , а $y = U_\varphi x$. Проверьте, что направленный отрезок \vec{y} получается из \vec{x} поворотом на угол φ против часовой стрелки. Поэтому матрицу U_φ называют *матрицей поворота* (рис.7.1).

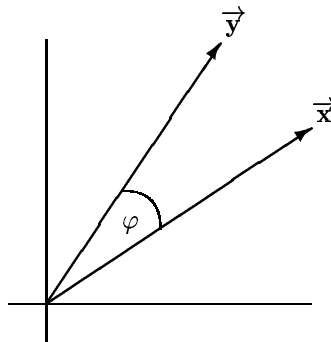


Рис.7.1

3. Покажите, что

$$\lambda_1(U_\varphi) = \exp(i\varphi), \quad \lambda_2(U_\varphi) = \exp(-i\varphi)$$

4. Найдите собственные векторы матрицы U_φ в \mathbb{C}^2 и проверьте их ортогональность. Обратите внимание на то, что при $\varphi \neq 0 \vee \varphi \neq \pi$ матрица U_φ не имеет собственных чисел и векторов в \mathbb{R}^2 . Дайте этому факту геометрическую трактовку.

7.6. Площадь параллелограмма и объем параллелепипеда

Свойство (2) унитарных матриц имеет в \mathbb{R}^3 важную геометрическую интерпретацию: если x, y, z – три линейно независимых вектора (соответствующие им направленные отрезки $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ некопланарны), и $X = Ux, Y = Uy, Z = Uz$, где U – ортогональная матрица, то длины отрезков $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ и углы между ними те же, что у тройки $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Докажем, что справедливо и обратное утверждение: если длины отрезков и углы между ними одинаковы для некопланарных троек

$$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ и } \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \text{ то}$$

$$[X, Y, Z] = U \cdot [x, y, z],$$

где U – ортогональная матрица.

Действительно, из условия следует равенство скалярных произведений соответствующих пар векторов

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= \langle x, x \rangle; & \langle Y, Y \rangle &= \langle y, y \rangle; & \langle Z, Z \rangle &= \langle z, z \rangle; \\ \langle X, Y \rangle &= \langle x, y \rangle; & \langle X, Z \rangle &= \langle x, z \rangle; & \langle Y, Z \rangle &= \langle y, z \rangle, \text{ т.е.} \\ [X, Y, Z]^* \cdot [X, Y, Z] &= [x, y, z]^* \cdot [x, y, z]. \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

Обозначим $U = [X, Y, Z] \cdot [x, y, z]^{-1}$ (матрица $[x, y, z]$ обратима, так как тройка $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ некопланарна и, следовательно, векторы x, y, z линейно независимы). Домножив равенство (7.6.1) справа на $[x, y, z]^{-1}$, а слева на $([x, y, z]^*)^{-1}$, получим $U^*U = I$.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для неколлинеарных пар направленных отрезков в \mathbb{R}^2 .

Пример. Поворот на угол φ вокруг оси OX_3 в \mathbb{R}^3 , очевидно, сохраняет длины отрезков и углы между ними. Направленные отрезки $\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)}$ – *орты* – переходят при этом повороте соответственно в отрезки

$$g^{(1)} = [\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0]^T, \quad g^{(2)} = [-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0]^T, \quad g^{(3)} = e^{(3)} = [0, 0, 1]^T.$$

Поэтому матрица

$$V_\varphi = [g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ортогональна (проверьте это!). Ее называют матрицей поворота в плоскости X_1OX_2 (или матрицей плоского вращения).

Получим теперь формулы для вычисления площади параллелограмма и объема параллелепипеда.

1. Пусть параллелограмм в \mathbb{R}^2 построен на направленных отрезках \vec{x} и \vec{y} . Покажем, что его площадь равна $|\det([x, y])|$

Рассмотрим сначала параллелограмм, изображенный на рис.7.2 (одна сторона лежит на оси абсцисс). Очевидно, что

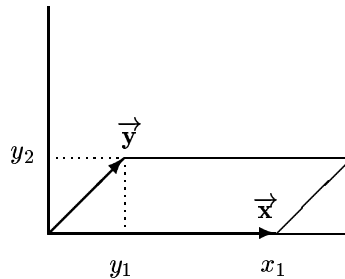


Рис.7.2

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad S = |y_2| \cdot |x_1| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \right| = |\det([x, y])|.$$

Пусть теперь неколлинеарные отрезки \vec{X}, \vec{Y} расположены произвольно. Для вычисления площади построенного на них параллелограмма рассмотрим конгруэнтный параллелограмм со стороной \vec{X} , лежащей на оси абсцисс (рис.7.3).

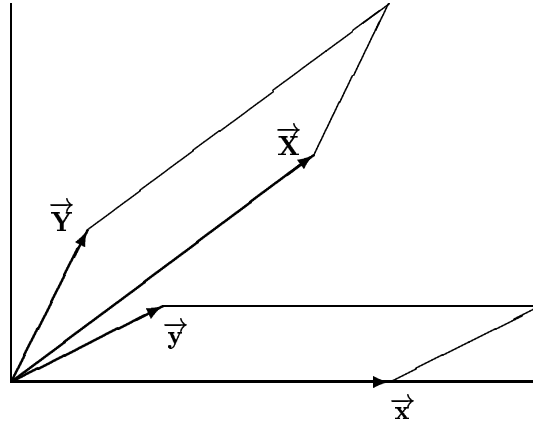


Рис.7.3

Мы доказали существование такой ортогональной матрицы U , что $x = UX, y = UY$. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= |\det([x, y])| = |\det(U \cdot [X, Y])| = \\ &= \det(U) \cdot |\det([X, Y])| = |\det([X, Y])|. \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

Проверьте вычислением, что формула (7.6.2) верна и в случае коллинеарных отрезков, когда площадь равна нулю.

2. Пусть параллелепипед в \mathbb{R}^3 построен на направленных отрезках \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} . Покажем, что его объем равен $|\det([x, y, z])|$

Рассмотрим сначала параллелепипед, изображенный на рис.7.4 (одна грань лежит в координатной плоскости):

$$x = [x_1, x_2, 0]^T, \quad y = [y_1, y_2, 0]^T, \quad z = [z_1, z_2, z_3]^T.$$

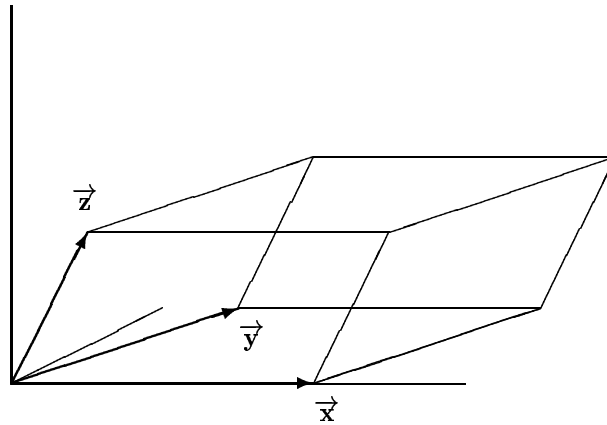


Рис.7.4

Объем параллелепипеда равен произведению высоты на площадь основания:

$$V = |z_3| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \right| = |\det([x, y, z])|.$$

Пусть теперь некомпланарные отрезки \vec{X} , \vec{Y} , \vec{Z} расположены произвольно. Для вычисления объема построенного на них параллелепипеда рассмотрим конгруэнтный параллелепипед с гранью, лежащей в координатной плоскости.

Мы доказали существование такой ортогональной матрицы U , что $x = UX, y = UY, z = UZ$. Поэтому

$$\begin{aligned} V &= |\det([x, y, z])| = |\det(U \cdot [X, Y, Z])| = \\ &= \det(U) \cdot |\det([X, Y, Z])| = |\det([X, Y, Z])|. \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

Проверьте вычислением, что формула (7.6.3) верна и в случае компланарных отрезков, когда объем равен нулю.

3. Вычислим, наконец, площадь параллелограмма в \mathbb{R}^3 для случая, когда он не лежит в координатной плоскости. Пусть этот параллелограмм построен на неколлинеарных отрезках \vec{x} и \vec{y} .

Построим третий отрезок \vec{w} , перпендикулярный \vec{x} и \vec{y} . Координаты вектора w удовлетворяют условиям ортогональности

$$\begin{cases} x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = 0 \\ y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 = 0 \end{cases}.$$

Одно из ненулевых решений этой системы

$$w = [\Delta_{23} \ \Delta_{13} \ \Delta_{12}]^T, \quad \text{где}$$

$$\Delta_{12} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{23} = -\det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{13} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\langle x, w \rangle = x_1 \Delta_{23} + x_2 \Delta_{13} + x_3 \Delta_{12} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Аналогично,

$$\langle y, w \rangle = \det \begin{pmatrix} y_1 & x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ y_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Кроме того, $w \neq \theta$ в силу линейной независимости векторов x и y .

Нормируем вектор w :

$$z = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{(\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} \Delta_{23} \\ \Delta_{13} \\ \Delta_{12} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что объем параллелепипеда с *единичной* высотой, построенного на направленных отрезках $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, численно равен площади его основания – параллелограмма, построенного на направленных отрезках \vec{x} и \vec{y} :

$$\begin{aligned} S = V &= |\det([x, y, z])| = \frac{1}{\|w\|} \cdot |\det([x, y, w])| = \\ &= \frac{1}{(\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2)^{1/2}} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \Delta_{23} \\ x_2 & y_2 & \Delta_{13} \\ x_3 & y_3 & \Delta_{12} \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2}{(\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2)^{1/2}} = (\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

Убедитесь, что в случае, когда \vec{x} и \vec{y} лежат в координатной плоскости, формула (7.6.4) превращается в (7.6.2).

Терминологическое замечание. В школьной "векторной алгебре", т.е. в алгебре направленных отрезков, отрезок, соответствующий вектору $w = [\Delta_{23}, \Delta_{13}, \Delta_{12}]^T$ называют *векторным произведением* отрезков \vec{x} и \vec{y} . Отметим свойства векторного произведения:

1. $\vec{w} \perp \vec{x}, \quad \vec{w} \perp \vec{y}$.
2. Длина \vec{w} равна площади параллелограмма, построенного на \vec{x} и \vec{y} .
3. Направленные отрезки $\vec{x}, \vec{y}, \vec{w}$ образуют правую тройку. В этом можно убедиться, положив $x = e^{(1)}, y = e^{(2)}$. Тогда $w = e^{(3)}$.

Число $|\det([x, y, z])|$ называют *смешанным (векторно-скалярным) произведением* направленных отрезков $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Так как $|\det([e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}])| = 1$, смешанное произведение положительно, если сомножители образуют правую тройку, и отрицательно, если левую.

В нашем курсе термины "векторное произведение" и "смешанное произведение" не используются.

7.7. Алгоритм Грама-Шмидта. QR -разложение матрицы

В заключение этой главы мы рассмотрим алгоритм Грама-Шмидта³, который позволяет, имея *линейно независимый* набор из k векторов в \mathbb{C}^n ($k \leq n$), построить *ортонормированный* набор из k векторов.

Итак, пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ – линейно независимые векторы. Положим

$$b^{(1)} = a^{(1)}; \quad b^{(2)} = a^{(2)} - \alpha_{12}b^{(1)}.$$

Число α_{12} выберем так, чтобы $\langle b^{(2)}, b^{(1)} \rangle = 0$, т.е. чтобы $b^{(2)}$ и $b^{(1)}$ были ортогональны:

$$\begin{aligned} \langle b^{(2)}, b^{(1)} \rangle &= \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle - \alpha_{12} \langle b^{(1)}, b^{(1)} \rangle = 0 \iff \\ &\iff \alpha_{12} = \frac{\langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle}{\langle b^{(1)}, b^{(1)} \rangle}. \end{aligned}$$

Если уже построены попарно ортогональные векторы $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$ и $m < k$, то положим

$$b^{(m+1)} = a^{(m+1)} - \alpha_{1,m+1}b^{(1)} - \dots - \alpha_{m,m+1}b^{(m)}. \quad (7.7.1)$$

Умножая (7.7.1) скалярно на $b^{(r)}$, $1 \leq r \leq m$, получим

$$\langle b^{(m+1)}, b^{(r)} \rangle = \langle a^{(m+1)}, b^{(r)} \rangle - \alpha_{r,m+1} \langle b^{(r)}, b^{(r)} \rangle = 0$$

(остальные слагаемые исчезнут вследствие попарной ортогональности уже построенных векторов). Отсюда

$$\alpha_{r,m+1} = \frac{\langle a^{(m+1)}, b^{(r)} \rangle}{\langle b^{(r)}, b^{(r)} \rangle}.$$

Осталось показать, что среди построенных *ортонормальных* векторов $b^{(1)}, \dots, b^{(k)}$ нет нулевого. Предположим, напротив, что $b^{(1)} \neq \theta, \dots, b^{(m)} \neq \theta$, но $b^{(m+1)} = \theta$. Подставив в равенство

$$\theta = a^{(m+1)} - \alpha_{1,m+1}b^{(1)} - \dots - \alpha_{m,m+1}b^{(m)}$$

выражения векторов $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$ через векторы $a^{(1)}, \dots, a^{(m)}$, получим

$$\theta = a^{(m+1)} + \gamma_1 a^{(1)} + \dots + \gamma_m a^{(m)},$$

где γ_r , $r = 1, \dots, m$ – некоторые числа.

Мы получили равную нулю линейную комбинацию линейно независимых векторов, один из коэффициентов которой отличен от нуля (коэффициент при $a^{(m+1)}$ равен единице). Это противоречие показывает, что среди построенных ортогональных векторов нулевых нет. Нормировав эти векторы, мы закончим работу алгоритма Грама-Шмидта.

Перепишем равенство (7.7.1) в виде

$$a^{(m+1)} = \alpha_{1,m+1}b^{(1)} + \dots + \alpha_{m,m+1}b^{(m)} + b^{(m+1)}; \quad m = 1, \dots, k-1. \quad (7.7.2)$$

и объединим наборы векторов в матрицы:

$$A = [a^{(1)}, \dots, a^{(k)}]; \quad B = [b^{(1)}, \dots, b^{(k)}].$$

Рассмотрите (7.7.2) и убедитесь, что $(m+1)$ -й столбец матрицы A может быть получен из матрицы B умножением справа на столбец $[\alpha_{1,m+1}, \dots, \alpha_{m,m+1}, 1, 0, \dots, 0]^T$, и, следовательно, вся матрица A получается умножением матрицы B справа на верхнюю треугольную матрицу с единичной диагональю

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad A = B\alpha. \quad (7.7.3)$$

³Эрхардт ШМИДТ (1876-1959) – немецкий математик.

Нормирование построенных векторов можно осуществить с помощью умножения справа на матрицу D^{-1} , где $D = \text{diag} [\|b^{(1)}\|, \dots, \|b^{(1)}\|]$. Тогда (7.7.3) перейдет в

$$A = B(D^{-1}D)\alpha = QR,$$

где $Q = BD^{-1}$, $R = D\alpha$.

Представление $(n \times k)$ -матрицы A с линейно независимыми столбцами в виде произведения $(n \times k)$ -матрицы Q с ортонормированными столбцами и верхней треугольной $(k \times k)$ -матрицы R с единичной диагональю называется *QR-разложением* матрицы A .

В частности, если A – квадратная невырожденная матрица, то Q – унитарная матрица.

Серьезное предупреждение. Необходимо отметить, что алгоритм, с помощью которого была доказана возможность получения QR -разложения, численно неустойчив и не может быть использован для вычислений. Численно устойчивые алгоритмы, выполняющие QR -разложение реализованы в средах конечного пользователя и в виде стандартных программ на Фортране.