

5. ЛИНЕЙНОЕ (ВЕКТОРНОЕ) ПРОСТРАНСТВО

5.1. Основные понятия

Рассмотрим множество всех матриц-столбцов высоты n с комплексными элементами. Матрицы-столбцы будем обозначать в этом пункте латинскими буквами, а числа – греческими. Нулевой столбец будем обозначать θ . Положим по определению $-x = (-1) \cdot x$ и будем называть столбец $-x$ *противоположным* столбцу x . Известно, что матрицы-столбцы можно складывать и умножать на числа. Перечислим свойства этих операций.

$$1) x + y = y + x, \quad 2) (x + y) + z = x + (y + z), \quad 3) x + \theta = x, \quad 4) x + (-x) = \theta;$$

$$5) 1 \cdot x = x, \quad 6) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x;$$

$$7) (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad 8) \alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Определение. Множество всех матриц-столбцов высоты n с комплексными элементами, в котором определены операции сложения и умножения на число, обладающие перечисленными выше свойствами (1 – 8), называется *линейным (векторным) пространством* и обозначается \mathbb{C}^n . Его элементы – $(n \times 1)$ -матрицы называются *векторами*.

Замечания. 1. Линейное пространство \mathbb{C}^n называют также *комплексным* линейным пространством в отличие от *вещественного* линейного пространства \mathbb{R}^n – множества всех *вещественных* матриц-столбцов высоты n , в котором разрешено умножение *только на вещественные* числа.

Может показаться, что уделено излишнее внимание перечислению известных свойств линейных операций над матрицами. Дело однако в том, что линейное пространство – одно из основных понятий современной математики. В нашем курсе мы рассматриваем, в основном, простейшие частные его случаи – \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n . Вообще же линейным пространством называют любое непустое множество, над элементами которого (векторами) можно производить две операции, именуемые *сложением* и *умножением на число*.

Сложение. Каждой паре элементов пространства (x, y) (векторов) ставится в соответствие вектор, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$. Эта операция должна удовлетворять следующим правилам:

$$1') x + y = y + x, \quad 2') (x + y) + z = x + (y + z).$$

3') В линейном пространстве должен быть такой *нулевой* вектор θ ,

$$\text{что } x + \theta = x \text{ для любого вектора } x.$$

4') У каждого вектора должен быть такой *противоположный* вектор $(-x)$, что $x + (-x) = \theta$

Умножение на число. Каждому вектору x и каждому числу α ставится в соответствие вектор αx , называемый их произведением. При этом

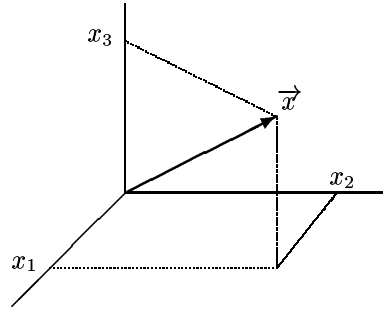
$$5') 1x = x, \quad 6') (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad 7') (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$$

$$8') \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Перечисленные восемь свойств называют *аксиомами линейного пространства*. Подчеркнем еще раз, что при построении теории не существенно, что представляют собой элементы линейного пространства – векторы (лишь бы их можно было "складывать", "умножать на числа", и выполнялись аксиомы). Тогда будут справедливы все выводы построенной теории. Один пример линейного пространства, отличного от \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n , будет рассмотрен в п.5.4.

3. Линейное пространство \mathbb{R}^3 имеет очевидную геометрическую интерпретацию: каждому его вектору $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ можно сопоставить направленный отрезок, начало которого совмещено с началом координат, а конец расположен в точке с координатами x_1, x_2, x_3 (рис.5.1). Мы будем обозначать направленный отрезок той же буквой, что и соответствующий ему вектор, но со стрелкой сверху. Нетрудно убедиться, что

$$\overrightarrow{x + y} = \vec{x} + \vec{y}; \quad \overrightarrow{\alpha x} = \alpha \cdot \vec{x}.$$

Рис.5.1 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$

5.2. Линейная зависимость векторов

Пусть заданы векторы из \mathbb{C}^n $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$. Составим уравнение

$$\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)} = \theta_n,$$

в котором искомыми являются числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Это уравнение может быть переписано в виде $A\alpha = \theta_n$, где $A = [a^{(1)}, \dots, a^{(k)}]$ – заданная $(n \times k)$ -матрица, $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]^T$ – искомый вектор-столбец, т.е. оно представляет собой *однородную* систему линейных уравнений.

Очевидно, что при любых заданных векторах эта система имеет *нулевое* решение

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_k = 0 \quad (\alpha = \theta_k).$$

Может оказаться, что нулевое решение *единственно*. Так, например, если

$$a^{(1)} = [1, 0, 0]^T, \quad a^{(2)} = [0, 1, 0]^T,$$

то уравнение

$$\alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} = [\alpha_1, \alpha_2, 0]^T = [0, 0, 0]^T = \theta_3$$

имеет *только нулевое* решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. В то же время известно, что однородная система линейных уравнений может иметь решения, отличные от нулевого (например, если число уравнений меньше, чем число переменных).

Определение. Если уравнение

$$\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)} = \theta \tag{5.2.1}$$

имеет *только нулевое* решение, то множество векторов $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ называется *линейно независимым*. Если же это уравнение имеет *ненулевые* решения, то упомянутое множество векторов называется *линейно зависимым*.

Докажем теперь несколько утверждений, связанных с понятием линейной зависимости множества векторов.

1. Множество, состоящее из одного *ненулевого* вектора линейно независимо.

Доказательство. $a \neq \theta \wedge \alpha a = \theta \implies \alpha = 0$.

2. Множество, содержащее *нулевой* вектор линейно зависимо.

Доказательство. Уравнение $\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)} + \alpha \theta = \theta$ имеет очевидное ненулевое решение $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0, \quad \alpha = 1$.

Введем новое понятие

Определение. Вектор $a = \alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)}$ называется линейной комбинацией векторов $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$.

3. Если множество векторов линейно зависимо, то хотя бы один из них есть линейная комбинация остальных.

Доказательство. Пусть $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$ – ненулевое решение уравнения (5.2.1), существующее в силу линейной зависимости множества векторов. Пусть для определенности $\alpha_m \neq 0$. Переносим в (5.2.1) слагаемое $\alpha_m \alpha^{(m)}$ в правую часть и делим обе части на $-\alpha_m$, получим

$$\alpha^{(m)} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_m}\right) \alpha^{(1)} + \dots + \left(-\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\right) \alpha^{(m-1)} + \left(-\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m}\right) \alpha^{(m+1)} + \dots + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_m}\right) \alpha^{(k)}.$$

4. Если хотя бы один из векторов множества есть линейная комбинация остальных, то множество линейно зависимо.

Доказательство. Пусть, например

$$\alpha^{(m)} = \alpha_1 \alpha^{(1)} + \dots + \alpha_{m-1} \alpha^{(m-1)} + \alpha_{m+1} \alpha^{(m+1)} + \dots + \alpha_k \alpha^{(k)}.$$

Переносим все слагаемые в правую часть, получим

$$\alpha_1 \alpha^{(1)} + \dots + \alpha_{m-1} \alpha^{(m-1)} + (-1) \alpha^{(m)} + \alpha_{m+1} \alpha^{(m+1)} + \dots + \alpha_k \alpha^{(k)}.$$

Мы построили *ненулевое* ($\alpha_m = -1$) решение уравнения (5.2.1) !

Замечание. Доказанные выше утверждения 3 и 4 часто формулируют так:

5. Линейная зависимость множества векторов равносильна возможности представления одного из них в виде линейной комбинации остальных.

6. Множество векторов, содержащее линейно зависимую часть, линейно зависимо.

Доказательство. Пусть множество содержит k векторов и его часть $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)}$ ($m < k$) линейно зависима, т.е. уравнение $\beta_1 \alpha^{(1)} + \dots + \beta_m \alpha^{(m)} = \theta$ имеет ненулевое решение (среди чисел β_1, \dots, β_m есть отличные от нуля). Тогда и уравнение

$$a = \alpha_1 \alpha^{(1)} + \dots + \alpha_m \alpha^{(m)} + \alpha_{m+1} \alpha^{(m+1)} + \dots + \alpha_k \alpha^{(k)}$$

имеет очевидное ненулевое решение

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_m = \beta_m; \quad \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_k = 0.$$

7. Всякая непустая часть линейно независимого множества линейно независима.

Доказательство. От противного.

Очевидные следствия.

8. Если два ненулевых вектора в $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ линейно зависимы, то соответствующие им направленные отрезки коллинеарны (лежат на одной прямой).

9. Если три ненулевых вектора в \mathbb{R}^3 линейно зависимы, то соответствующие им направленные отрезки компланарны (лежат в одной плоскости).

5.3. Размерность линейного пространства и его базис.

Определение. Если в линейном пространстве P существует линейно независимая часть из n векторов, а всякая часть, содержащая более, чем n векторов, линейно зависима, то говорят, что пространство имеет размерность n и пишут:

$$\dim(P) = n \quad (\text{от английского dimension – размерность}).$$

Пример. Докажем, что $\dim(\mathbb{C}^n) = n$.

Действительно, множество, состоящее из n векторов

$$e^{(1)} = [1, 0, \dots, 0]^T, e^{(2)} = [0, 1, \dots, 0]^T, \dots, e^{(n)} = [0, 0, \dots, 1]^T$$

линейно независимо, так как уравнение $\alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \dots + \alpha_n e^{(n)} = \theta$ или

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{или, наконец, } I_n \alpha = \theta$$

имеет единственное решение $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

В то же время любая часть \mathbb{C}^n , содержащая больше, чем n векторов, линейно зависима, так как при $m > n$ уравнение $\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_m a^{(m)} = \theta_n$ имеет ненулевое решение как однородная система, в которой количество переменных (m) превышает количество уравнений (n).

Из нашего рассуждения следует, что и $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Если не ограничиваться линейными пространствами \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n , то нельзя исключить случай, когда существуют линейно независимые части линейного пространства, содержащие как угодно много векторов. Это дает основание ввести

Определение. Если для любого $n \in \mathbb{N}$ в линейном пространстве существует линейно независимая часть, состоящая из n векторов, то линейное пространство называется *бесконечномерным*.

Для *конечномерных* линейных пространств введем понятие базиса

Определение. Базисом n -мерного линейного пространства называется любой упорядоченный линейно независимый набор из n векторов этого пространства.

Пример. Векторы $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$, введенные выше, образуют базис в \mathbb{C}^n и в \mathbb{R}^n . Его называют *стандартным базисом*.

Роль базиса определяет

Теорема. Всякий вектор конечномерного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса, и такое представление единственно.

Доказательство. Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ – базис, и b – произвольный вектор. По определению размерности пространства множество $b, a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$, содержащее более, чем n векторов, линейно зависимо. Поэтому уравнение

$$\alpha b + \alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_n a^{(n)} = \theta_n$$

имеет ненулевое решение. В частности, $\alpha \neq 0$, ибо иначе имело бы ненулевое решение уравнение

$$\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_n a^{(n)} = \theta_n,$$

и базис оказался бы линейно зависимым множеством! А если $\alpha \neq 0$, то

$$b = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) a^{(1)} + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha}\right) a^{(n)},$$

и *возможность* представления произвольного вектора в виде линейной комбинации базисных векторов доказана. Докажем теперь *единственность* такого представления. Пусть имеются два представления вектора в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$b = \beta_1 a^{(1)} + \dots + \beta_n a^{(n)}; \quad b = \gamma_1 a^{(1)} + \dots + \gamma_n a^{(n)}.$$

Вычитая эти равенства почленно, получаем

$$\theta = (\beta_1 - \gamma_1) a^{(1)} + \dots + (\beta_n - \gamma_n) a^{(n)}.$$

Отсюда, вследствие линейной независимости базиса, все коэффициенты при его векторах – нули, т.е. $\beta_1 = \gamma_1, \dots, \beta_n = \gamma_n$.

Определение. Представление вектора в виде линейной комбинации векторов базиса называют *разложением вектора по базису*, а коэффициенты этого разложения – *координатами* этого вектора в этом базисе.

Замечания. 1. Отметим существенность фиксации порядка векторов в базисе (упорядоченности базиса). Изменив порядок векторов в базисе, получим, конечно, опять базис, но другой!

2. Обратите внимание на то, что разложение вектора b по базису $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$, т.е. решение уравнения

$$\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_n a^{(n)} = b \quad (5.3.1)$$

сводится в \mathbb{C}^n и в \mathbb{R}^n к решению матричного уравнения

$$A\alpha = b, \quad (5.3.2)$$

где, как всегда, $A = [a^{(1)}, \dots, a^{(n)}]$, $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$

Таким образом, (5.3.1) и (5.3.2) представляют собой попросту две различные формы записи одного и того же уравнения – "векторную" и "матричную".

Следствия. 1. Если столбцы квадратной матрицы линейно независимы (т.е. составляют базис \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n)), то система линейных уравнений (5.3.2) имеет единственное решение при любом столбце свободных членов.

2. Поскольку единственность решения линейной системы с квадратной матрицей равносильна (как уже известно) невырожденности этой матрицы, то линейная независимость столбцов квадратной матрицы также равносильна ее невырожденности. Итак, если – квадратная матрица порядка n , то равносильны следующие три утверждения:

$$\det(A) \neq 0;$$

столбцы матрицы A образуют базис \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n);

система линейных уравнений $Ax = b$ при любом столбце b имеет единственное решение.

5.4. Пространство полиномов порядка n

Как известно, полиномом степени $k \geq 0$ называется функция, действующая из \mathbb{C} в \mathbb{C} по правилу

$$p(z) = p_1 + p_2 z + \dots + p_{k+1} z^k, \quad (5.4.1)$$

где p_1, \dots, p_{k+1} – заданные комплексные числа, называемые *коэффициентами полинома*, причем $p_{k+1} \neq 0$.

Замечание. Если коэффициенты полинома – вещественные числа, то (5.4.1) определяет также функцию, действующую из \mathbb{R} в \mathbb{R} .

Определение. Назовем линейным пространством полиномов *порядка n* множество, содержащее все полиномы, *степень* которых *строго меньше n* , и функцию, тождественно равную нулю. Иначе говоря, полиномом *порядка n* будем называть функцию $p(z) = p_1 + p_2 z + \dots + p_n z^{n-1}$, где p_1, \dots, p_n – произвольный набор комплексных чисел (в том числе он может состоять из одних нулей).

Линейное пространство полиномов *порядка n* будем обозначать \mathbb{P}_n . Функцию $\theta(z) \equiv 0$ будем называть *нуль-полиномом*. Степень нуль-полинома не определена!

В пространстве \mathbb{P}_n естественным образом определены сумма полиномов и произведение полинома на число:

$$(p + q)(z) = (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2)z + \dots + (p_n + q_n)z^{n-1};$$

$$(\alpha p)(z) = (\alpha p_1) + (\alpha p_2)z + \dots + (\alpha p_n)z^{n-1}.$$

Замечание. Обратите внимание на то, что *степень* полинома вовсе не обязана сохраняться при сложении и умножении на число. Например, складывая два полинома степени 2, можно получить полином нулевой степени $(1 + z^2) + (-z^2) = 1$. Умножая полином любой степени на нуль (который есть число!), получаем нуль-полином, степень которого не определена.

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что множество \mathbb{P}_n с введенными в нем операциями сложения и умножения на число, "авансом" названное нами *линейным пространством*, действительно является

такowym (т.е. удовлетворяет аксиомам, приведенным в п.5.1). Роль нулевого элемента играет при этом нуль-полином, а роль противоположного полиному p элемента – полином

$$(-p)(z) = (-p_1) + (-p_2)z + \dots + (-p_n)z^{n-1}.$$

Теорема. $dim(\mathbb{P}_n) = n$.

Доказательство. Рассмотрим множество, состоящее из n полиномов порядка n

$$e^{(1)}(z) \equiv 1, \quad e^{(2)}(z) = z, \quad \dots, e^{(n)}(z) = z^{(n-1)}.$$

Составим уравнение

$$\alpha_1 e^{(1)}(z) \dots + \alpha_n e^{(n)}(z) = \theta(z) \equiv 0 \quad (5.4.2).$$

Зафиксируем n *попарно различных* чисел z_1, \dots, z_n и, полагая в (5.4.2) $z = z_k$, $k = 1, \dots, n$, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 z_1 + \dots + \alpha_n z_1^{n-1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 + \alpha_2 z_n + \dots + \alpha_n z_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

или, в матричной записи, $V(z_1, \dots, z_n)\alpha = \theta$, где V – матрица Вандермонда.

Вследствие попарного различия чисел z_1, \dots, z_n $\det(V) \neq 0$. Поэтому уравнение (5.4.2) имеет только нулевое решение, и, значит рассматриваемый набор полиномов линейно независим.

С другой стороны, если множество

$$\left\{ p^{(1)}(z) = p_{11} + p_{21}z + \dots + p_{n1}z^{n-1}, \dots, p^{(k)}(z) = p_{1k} + p_{2k}z + \dots + p_{nk}z^{n-1} \right\}$$

содержит более, чем n полиномов ($k > n$), то, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной z в левой и правой частях уравнения

$$\alpha_1 p^{(1)}(z) + \dots + \alpha_k p^{(k)}(z) = \theta(z),$$

получим *однородную* систему из n уравнений с k переменными ($k > n$), которая имеет ненулевые решения. Следовательно, всякое множество, содержащее более, чем n полиномов из \mathbb{P}^n , линейно зависимо.

Мы доказали утверждение теоремы и показали, что упорядоченный набор полиномов $\{e^{(1)}(z) \equiv 1, e^{(2)}(z) = z, \dots, e^{(n)}(z) = z^{(n-1)}\}$ образует базис \mathbb{P}_n . Этот базис называют стандартным.

Замечания. 1. Разложение полинома по стандартному базису очевидно совпадает с его записью по возрастающим степеням переменной.

2. Из-за специфики конкретных задач могут оказаться более удобными разложения полинома по другим базисам \mathbb{P}_n . С примерами таких задач мы познакомимся в п.п. 5.5 и 11.3.

5.5. Интерполяционный полином

Теорема. Существует полином порядка n , который в заданных n точках принимает заданные значения, и такой полином один.

Доказательство. Пусть заданы n упорядоченных пар чисел

$$(z_1, y_1), \dots, (z_n, y_n).$$

Построим n полиномов порядка n :

$$\begin{aligned} l^{(1)}(z) &= \frac{(z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot \dots \cdot (z - z_n)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_1 - z_3) \cdot \dots \cdot (z_1 - z_n)}; \\ l^{(2)}(z) &= \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_3) \cdot \dots \cdot (z - z_n)}{(z_2 - z_1) \cdot (z_2 - z_3) \cdot \dots \cdot (z_2 - z_n)}; \\ &\dots\dots\dots \\ l^{(n)}(z) &= \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_{n-1})}{(z_n - z_1) \cdot (z_n - z_2) \cdot \dots \cdot (z_n - z_{n-1})}. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Отметим, что

$$l^{(m)}(z_k) = \delta_{mk}, \quad k, m = 1, \dots, n. \quad (5.5.3)$$

Составим уравнение

$$\alpha_1 l^{(1)}(z) + \dots + \alpha_n l^{(n)}(z) = \theta(z) \equiv 0 \quad (5.5.2)$$

и положим в нем поочередно $z = z_1, \dots, z = z_n$.

Используя (5.5.3) находим, что уравнение (5.5.2) имеет *только нулевое* решение, т.е. полиномы (5.5.1) линейно независимы и образуют базис \mathbb{P}_n .

Построим теперь полином L порядка n , принимающий в заданных точках заданные значения

$$L(z_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.5.4)$$

Искать его будем в виде разложения по построенному базису (5.5.1)

$$L(z) = \sum_{m=1}^n \alpha_m l^{(m)}(z).$$

Выписывая условия (5.5.4), получим систему уравнений для определения коэффициентов разложения

$$L(z_k) = \sum_{m=1}^n \alpha_m l^{(m)}(z_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Подставив сюда (5.5.3), получим

$$\sum_{m=1}^n \alpha_m l^{(m)}(z_k) = \sum_{m=1}^n \alpha_m \delta_{mk} = \alpha_k = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Мы не только доказали теорему, но и получили явное выражение для единственного полинома порядка n , принимающего в n заданных точках заданные значения

$$L(z) = \sum_{m=1}^n y_m l^{(m)}(z). \quad (5.5.5)$$

Его называют *интерполяционным полиномом в форме Лагранжа*¹.

Замечание. Существенно, что в теореме фиксируется *порядок* интерполяционного полинома, а не его *степень*. Взяв, например, $y_k \equiv 1$; $k = 1, \dots, n$, получим при *любом* n $L(z) \equiv 1$ – полином *нулевой* степени.

Пример. Построим полином третьего порядка, соответствующий таблице

z	1	2	3
y	4	5	6

$$L(z) = 4 \cdot \frac{(z-2)(z-3)}{(1-2)(1-3)} + 5 \cdot \frac{(z-1)(z-3)}{(2-1)(2-3)} + 6 \cdot \frac{(z-1)(z-2)}{(3-1)(3-2)} = z + 3.$$

¹Жозеф Луи ЛАГРАНЖ (1736-1813) – французский математик и механик, президент Берлинской АН, член многих академий мира, один из разработчиков метрической системы мер.