

Глава 14. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Метод простой итерации

Все до сих пор рассматривавшиеся нами методы решения систем относились к классу *прямых* методов: они приводили к решению за конечное число шагов. Здесь мы рассмотрим один из *итерационных* методов¹ – метод *простой итерации*.

Пусть система n линейных уравнений с n переменными задана в виде

$$x = Ax + b. \quad (14.1.1)$$

Начиная с произвольного вектора $x^{(0)}$ построим последовательность

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} + b, \dots, x^{(k)} = Ax^{(k-1)} + b, \dots \quad (14.1.2)$$

Теорема. Если $\|A\| = q < 1$, то система (14.1.1) имеет единственное решение, причем для любого $x^{(0)}$ последовательность (14.1.2) сходится к этому решению.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему $(I - A)x = \theta$. Если x – ее решение, то

$$x = Ax \implies \|x\| = \|Ax\| \leq q\|x\| \implies x = \theta.$$

Поэтому $\det(I - A) \neq 0$ и система (14.1.1) имеет единственное решение. Обозначим его \tilde{x} и вычтем из (14.1.2) равенство $\tilde{x} = A\tilde{x} + b$. Получим

$$\begin{aligned} x^{(k)} - \tilde{x} &= Ax^{(k-1)} - A\tilde{x}, \quad \text{откуда} \\ \|x^{(k)} - \tilde{x}\| &= \|A(x^{(k-1)} - \tilde{x})\| \leq q \cdot \|x^{(k-1)} - \tilde{x}\|, \quad \text{т.е.} \\ \|x^{(k)} - \tilde{x}\| &\leq q^k \cdot \|x^{(0)} - \tilde{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (14.1.3)$$

Теорема доказана и, кроме того, установлено, что последовательность (14.1.2) сходится к решению не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем q .

Из (14.1.3) и неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} \|x^{(k-1)} - \tilde{x}\| &\leq \|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - \tilde{x}\| \leq \\ &\leq \|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| + q \cdot \|x^{(k-1)} - \tilde{x}\| \quad \text{или} \\ \|x^{(k-1)} - \tilde{x}\| &\leq \frac{\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\|}{1 - q}. \end{aligned}$$

Таким образом, прекратив итерации, когда норма разности двух соседних приближений станет меньше, чем $\varepsilon(1 - q)$, мы получим решение с погрешностью не большей, чем ε (по норме!).

Замечание. Можно показать, что однозначная разрешимость системы (14.1.1) и сходимость процесса простых итераций к решению обеспечивается условием $|\lambda(A)|_{\max} < 1$. При этом, правда, не работает оценка скорости сходимости (14.1.3).

Пример. Систему $Bx = b$ с положительно определенной матрицей преобразуем так:

$$x = (I - \alpha B)x + \alpha b \quad (14.1.4)$$

Здесь α – положительное, пока произвольное число. Обозначим $A = I - \alpha B$. Тогда

$$\lambda(A) = 1 - \alpha\lambda(B) < 1 \quad (B \text{ положительно определена}).$$

Видно, что с ростом α собственные числа матрицы A "ползут" по числовой оси влево от единицы. Поскольку A эрмитова,

$$\|A\| = \sigma_{\max}(A) = \max(|\lambda_{\max}(A)|, |\lambda_{\min}(A)|).$$

Наименьшего значения $\|A\|$ достигает, очевидно, когда $\lambda_{\min}(A) = -\lambda_{\max}(A)$, т.е. при

$$1 - \alpha\lambda_{\max}(B) = -(1 - \alpha\lambda_{\min}(B)).$$

¹Ранее мы уже рассмотрели один итерационный метод – метод Якоби (п.8.2).

Отсюда

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_{\max}(B) + \lambda_{\min}(B)},$$

$$\|A\| = \lambda_{\max}(A) = 1 - \frac{2\lambda_{\min}(B)}{\lambda_{\max}(B) + \lambda_{\min}(B)} = 1 - \frac{2}{1 + \text{cond}(B)}. \quad (14.1.5)$$

В последнем равенстве учтено, что для положительно определенной матрицы

$$\text{cond} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

Анализ (14.1.5) показывает, что при большом числе обусловленности матрицы коэффициентов рассматриваемой системы знаменатель геометрической прогрессии в (14.1.3) близок к единице, т.е. итерации сходятся медленно, а за счет вычислительных погрешностей могут и расходиться.

Никакими методами нельзя хорошо решить плохую систему!

На практике ситуация осложняется незнанием собственных чисел матрицы коэффициентов системы. Вместо них обычно используются некоторые их оценки. Подробное рассмотрение этой проблемы выходит за рамки нашего курса, как и рассмотрение других, более сложных итерационных методов.

14.2. Итерационное уточнение решений системы линейных алгебраических уравнений

В главе 1 был подробно рассмотрен один из прямых методов решения системы $Ax = b$ – метод Гаусса-Жордана. При этом предполагалось, что арифметические операции выполняются точно. В реальном компьютере вследствие конечности разрядной сетки это условие нарушается. Поэтому найденный любым прямым методом вектор $x^{(0)}$ не будет, вообще говоря, решением системы ($Ax^{(0)} \neq b$), и невязка окажется отличной от нуля:

$$d^{(0)} = b - Ax^{(0)} \neq \theta.$$

Попробуем подобрать такой вектор Δx ("добавку" к $x^{(0)}$), чтобы выполнялось равенство

$$A(x^{(0)} + \Delta x) = b.$$

Искомый вектор $\Delta x^{(0)}$ найдем, решая систему

$$A\Delta x = b - Ax^{(0)} = d^{(0)}$$

с той же матрицей, тем же прямым методом.

Понятно, что из-за неточности машинной арифметики полученный вектор $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$ также не будет, вообще говоря, решением системы ($Ax^{(1)} \neq b$). Находим новую невязку и т.д.

Мы построили итерационный процесс

$$d^{(k)} = b - Ax^{(k)}, \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)},$$

где $\Delta x^{(k)}$ – полученное прямым методом "решение" системы $A\Delta x = d^{(k)}$.

Замечания. 1. Вычисление невязок должно выполняться в арифметике повышенной точности, иначе итерации не обеспечат уточнения.

2. Если прямой метод основан на какой-нибудь факторизации матрицы коэффициентов системы, то эту факторизацию – самую трудоемкую часть работы – следует выполнить один раз, полученные сомножители хранить и использовать на каждом шаге итерации.

3. Подробное исследование описанного процесса уточнения решения показало, что для не очень плохо обусловленных систем он сходится чрезвычайно быстро: три-четыре итерации обеспечивают получение решения с машинной точностью. Отсутствие же сходимости свидетельствует об очень большом числе обусловленности, что обычно означает, что эту систему решать не следует.

Мы настоятельно рекомендуем использовать для решения систем линейных уравнений только библиотечные программы с итерационным уточнением.