

Глава 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

3.1. Определение. Примеры

Зададим на множестве всех *квадратных числовых* матриц функцию, которая ставит в соответствие каждой такой матрице число, называемое ее *определителем* (*детерминантом*). Определитель квадратной матрицы A принято обозначать символом $\det(A)$.

Определение этой функции построим индуктивно.

Определение. *Определителем матрицы первого порядка* называется число – ее единственный элемент:

$$\det[a_{11}] = a_{11}.$$

2. Пусть теперь $n > 1$ – порядок матрицы, и мы умеем вычислять определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка.

Удалив из матрицы одну строку (i -ю) и один столбец (k -й), получим матрицу $(n-1)$ -го порядка. Ее определитель (который мы по предположению умеем вычислять) назовем *дополнительным минором* элемента a_{ik} (стоящего на пересечении удаленных строки и столбца). Обозначается дополнительный минор M_{ik} . Число $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$ именуется *алгебраическим дополнением* элемента матрицы a_{ik} .

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11};$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot M_{23}.$$

Определение. *Определителем квадратной числовой матрицы A порядка $n > 1$* называется число

$$\det(A) = a_{1k}A_{1k} + \dots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ik}A_{ik}; \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3.1.1)$$

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов *какого-нибудь* ее столбца на их алгебраические дополнения.

Замечания. 1. Сформулированное определение будет корректно, если доказать, что получаемое число *не зависит от выбора столбца*. Мы не приводим доказательство из-за его технической сложности.

2. Выражение (3.1.1) обычно называют *разложением определителя по k -му столбцу матрицы*.

Примеры.

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Разложим определитель матрицы по ее первому столбцу

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} = \\ &= a_{11}\det([a_{22}]) - a_{21}\det([a_{12}]) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Убедитесь в том, что результат не изменится, если разложение выполнить по второму столбцу.

Определитель матрицы *второго порядка* равен разности между произведением ее диагональных элементов и произведением ее внедиагональных элементов.

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Разложим определитель этой матрицы по ее третьему столбцу

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = \\
 &= a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + a_{23}(-1)^{2+3}M_{23} + a_{33}(-1)^{3+3}M_{33} = \\
 &= a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} - a_{23}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + a_{33}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\
 &= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).
 \end{aligned}$$

Убедитесь, что результат не изменится, если разлагать определитель по первому или по второму столбцу.

Замечание. Вычисление определителя матрицы второго порядка требует выполнения двух умножений и двух сложений. Вычисление определителя матрицы второго порядка сводится (в соответствии с определением) к вычислению трех определителей матриц второго порядка, выполнению трех умножений и трех сложений. Соответственно, вычисление определителя матрицы порядка n сводится к вычислению n определителей матриц $(n-1)$ -го порядка, и выполнению n умножений и n сложений.

Обозначим $F(n)$ количество арифметических операций, затрачиваемых на вычисление определителя матрицы порядка n . Из предыдущих рассуждений следует, что

$$F(n) > n \cdot F(n-1), \quad \text{т.е.} \quad F(n) > n!$$

Эта простая оценка показывает, что "по определению" (3.1.1) определители матриц вычислять нельзя. Действительно, если принять, что одна арифметическая операция выполняется за 10^{-9} сек., то для вычисления определителя матрицы 20-го порядка потребуется более $20! \cdot 10^{-9}$ сек. ≈ 77 лет, а для вычисления определителя матрицы 30-го порядка – около 10^{16} лет!

Отметим один класс квадратных матриц, определители которых (в отличие от общего случая) легко вычислять "по определению". Это так называемые *треугольные* матрицы, т.е. квадратные матрицы, у которых равны нулю либо все поддиагональные элементы (*верхние треугольные* матрицы), либо все наддиагональные элементы (*нижние треугольные* матрицы).

Разложим определитель верхней треугольной матрицы по элементам первого столбца:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Полученный определитель опять разлагаем по элементам первого столбца

$$a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Тот же результат, очевидно получится для нижней треугольной матрицы, если разлагать ее определитель по элементам последнего столбца. Итак,

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

В частности,

$$\det(I) = \det(\text{diag}[1, 1, \dots, 1]) = 1.$$

Определитель единичной матрицы любого порядка равен единице.

3.2. Свойства определителя

Для начала условимся о компактной записи матрицы, при которой указываются не все ее элементы, а только имена ее столбцов.

$$A = [a^{(1)}, \dots, a^{(n)}], \quad \text{где}$$

$$a^{(1)} = [a_{11}, \dots, a_{n1}]^T, \dots, a^{(n)} = [a_{1n}, \dots, a_{nn}]^T.$$

Переставим в матрице A два *соседних* столбца:

$$A = \begin{bmatrix} & (k) & (k+1) & \\ \dots & p & q & \dots \end{bmatrix}; \quad A' = \begin{bmatrix} & (k) & (k+1) & \\ \dots & q & p & \dots \end{bmatrix}.$$

Разложим $\det(A)$ по элементам k -го столбца, а $\det(A')$ – по элементам $(k+1)$ -го столбца:

$$\det(A) = p_1 A_{1k} + \dots + p_n A_{nk};$$

$$\det(A') = p_1 A'_{1,k+1} + \dots + p_n A'_{n,k+1}.$$

Поскольку при удалении из матриц A и A' столбца p получается одна и та же матрица и $M_{ik} = M'_{i,k+1}$; ($i = 1, \dots, n$), имеем

$$A'_{i,k+1} = (-1)^{i+k+1} M'_{i,k+1} = (-1)(-1)^{i+k} M_{ik} = (-1) \cdot A_{ik},$$

откуда $\det(A') = (-1) \cdot \det(A)$, т.е. при перестановке *соседних* столбцов определитель матрицы умножается на (-1) .

Рассмотрим теперь произвольную пару столбцов

$$A = \begin{bmatrix} & (i) & & (k) & \\ \dots & p & \dots & q & \dots \end{bmatrix}; \quad A' = \begin{bmatrix} & (i) & & (k) & \\ \dots & q & \dots & p & \dots \end{bmatrix}.$$

Поменяем их местами, последовательно переставляя соседние столбцы:

$$i \longleftrightarrow i+1, i+1 \longleftrightarrow i+2, \dots, k-1 \longleftrightarrow k, k-1 \longleftrightarrow k-2, \dots, i+1 \longleftrightarrow i.$$

Таких перестановок – $(2(k-1)-1)$. При каждой из них определитель умножается на (-1) , следовательно, в результате он умножится на $(-1)^{2(k-1)-1} = -1$.

1. Перестановка двух столбцов матрицы приводит к умножению ее определителя на (-1) .

Пусть в матрице есть два одинаковых столбца. Поменяв их местами, мы матрицу не изменим, т.е. $A' = A$ и $\det(A') = \det(A)$. Но по свойству (1) $\det(A') = (-1) \cdot \det(A)$. Отсюда $\det(A) = 0$.

2. Определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.

Зафиксируем в матрице все столбцы, кроме k -го, а k -й сделаем переменным. Тогда каждому значению этого столбца будет соответствовать число – значение определителя матрицы, т.е. на множестве столбцов будет задана функция

$$f(x) = \det([a^{(1)}, \dots, a^{(k-1)}, x, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)}]).$$

Покажем, что f – линейная функция, т.е. что

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для любых числовых столбцов x, y и любых чисел α, β .

Разлагая определитель $f(\alpha x + \beta y) = \det([\dots, \alpha x + \beta y, \dots])$ по элементам переменного k -го столбца, получим

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) A_{ik} = \alpha \sum_{i=1}^n x_i A_{ik} + \beta \sum_{i=1}^n y_i A_{ik} = \\ &= \alpha \cdot \det([\dots, x, \dots]) + \beta \cdot \det([\dots, y, \dots]) = \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

3. Определитель матрицы – линейная функция каждого ее столбца. В частности, умножение столбца матрицы на число приводит к умножению на это число ее определителя.

Выделим в матрице два столбца: $A = [\dots p \dots q \dots]$. Тогда в силу свойства (3) для любого числа α

$$\det([\dots p + \alpha q \dots q \dots]) = \det([\dots p \dots q \dots]) + \alpha \det([\dots q \dots q \dots]).$$

Но по свойству (2) $\det([\dots q \dots q \dots]) = 0$, т.е.

$$\det([\dots p + \alpha q \dots q \dots]) = \det([\dots p \dots q \dots]).$$

4. Определитель матрицы не изменится, если к некоторому ее столбцу прибавить другой столбец, умножив его предварительно на любое число.

Сделаем k -й столбец матрицы A переменным. Тогда получим тождество относительно x :

$$\det([\dots \overset{(k)}{x} \dots \overset{(m)}{a^{(m)}} \dots]) = x_1 A_{1k} + \dots + x_n A_{nk}.$$

Подставив вместо x m -й столбец ($m \neq k$), получим определитель матрицы с одинаковыми столбцами, который равен нулю.

$$0 = \det([\dots \overset{(k)}{a^{(m)}} \dots \overset{(m)}{a^{(m)}} \dots]) = a_{1m} A_{1k} + \dots + a_{nm} A_{nk}.$$

5. Сумма произведений элементов столбца матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ее столбца равна нулю.

Транспонирование матрицы не меняет ее определителя

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Доказательство этого утверждения технически сложно, и мы его опускаем.

Следствия. 1. Утверждения (1 - 5), доказанные для столбцов матрицы, верны и для ее строк.

2. Имеет место разложение определителя матрицы по элементам любой ее строки:

$$\det(A) = a_{k1} A_{k1} + \dots + a_{kn} A_{kn} = \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki}; \quad (k = 1, \dots, n).$$

3. Из свойства (6) и определения эрмитова сопряжения следует, что

7. Определители эрмитово сопряженных матриц – сопряженные комплексные числа

$$\det(A^*) = \overline{\det(A)}.$$

Доказательство следующего свойства также опускается из-за его технической сложности. Для матриц второго порядка проверим это свойство прямым вычислением.

8. Определитель произведения двух *квадратных* матриц равен произведению определителей сомножителей.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Тогда

$$\det(AB) = \det \left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \right).$$

Рассматривая первый столбец матрицы-произведения как сумму двух столбцов, получим по свойству (3):

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \right) + \\ &+ \det \left(\begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Теперь вторые столбцы матриц представлены в виде сумм. Поэтому

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix} \right) + \det \left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \right) + \\ &+ \det \left(\begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix} \right) + \det \left(\begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Элементы матрицы B – общие множители в столбцах. По свойству (3)

$$\begin{aligned} \det(AB) &= b_{11}b_{12} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} \right) + b_{11}b_{22} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) + \\ &+ b_{21}b_{12} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} \right) + b_{21}b_{22} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Теперь во втором и в третьем слагаемом определители матриц равны соответственно $\det(A)$ и $-\det(A)$, а в первом и в четвертом – нулю (свойство (2)). Поэтому

$$\det(AB) = \det(A) \cdot (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Рассмотренные свойства определителя позволяют вычислять его путем преобразования матрицы в треугольную (определитель которой равен произведению диагональных элементов. Технологию рассмотрим на примере так называемой матрицы Вандермонда¹

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Обозначим определитель матрицы Вандермонда $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Вычтем из n -го столбца матрицы ее $(n-1)$ -й столбец, умноженный на z_1 ; вычтем из $(n-1)$ -го столбца матрицы ее $(n-2)$ -й столбец, умноженный на z_1 ; ...; вычтем из 2-го столбца матрицы ее 1-й столбец, умноженный на z_1 . В силу свойства (4) определитель не изменится:

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 & z_2(z_2 - z_1) & \dots & z_2^{n-2}(z_2 - z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n - z_1 & z_n(z_n - z_1) & \dots & z_n^{n-2}(z_n - z_1) \end{bmatrix} \right).$$

Разложим определитель по 1-й строке:

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} z_2 - z_1 & z_2(z_2 - z_1) & \dots & z_2^{n-2}(z_2 - z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n - z_1 & z_n(z_n - z_1) & \dots & z_n^{n-2}(z_n - z_1) \end{bmatrix} \right).$$

В силу свойства (3) можно вынести за знак определителя общие множители строк $(z_2 - z_1), \dots, (z_n - z_1)$.

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_2 - z_1) \cdot \dots \cdot (z_n - z_1) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-2} \end{bmatrix} \right) = V(z_2, \dots, z_n).$$

¹Александр Теофил ВАНДЕРМОНД (1735-1796) – французский математик, член Парижской АН.

Повторяя эту операцию, понижающую порядок матрицы, в конце концов получим

$$\begin{aligned} V(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \\ &= ((z_2 - z_1) \cdot \dots \cdot (z_n - z_1)) \cdot ((z_3 - z_2) \cdot \dots \cdot (z_n - z_2)) \cdot ((z_n - z_{n-1})) = \\ &= \prod_{m>k} (z_m - z_k). \end{aligned}$$

Заметим, что если z_1, z_2, \dots, z_n — попарно различные числа, то определитель матрицы Вандермонда *отличен от нуля*.

3.3. Матричные уравнения с квадратной матрицей коэффициентов

Определение. Квадратная матрица, определитель которой равен нулю называется *вырожденной*.

Применим к уравнению с квадратной матрицей коэффициентов алгоритм Гаусса-Жордана. Используемые в нем элементарные преобразования либо не изменяют величину определителя матрицы коэффициентов, либо умножают определитель на *отличное от нуля* число (проверьте это!).

1. Если определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля, то в результате работы алгоритма он не может стать нулем, в матрице коэффициентов не может появиться нулевая строка и по завершении работы алгоритма эта матрица превратится в единичную.

Матричное уравнение с *квадратной невырожденной* матрицей коэффициентов имеет решение, и это решение единственно.

Это утверждение известно как теорема Крамера².

2. Если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, то работа алгоритма Гаусса-Жордана не может завершиться превращением этой матрицы в единичную.

Матричное уравнение с *квадратной вырожденной* матрицей коэффициентов либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.

Однородное уравнение не может быть несовместным.

Однородное матричное уравнение с *квадратной вырожденной* матрицей коэффициентов имеет бесконечно много решений.

3.4. Структура обратной матрицы. Формулы Крамера

Рассмотрим теперь вопрос об обратимости квадратной матрицы A , т.е. о существовании решения матричных уравнений $AX = XA = I$.

Покажем, что вырожденная матрица не имеет обратной. Действительно, $\det(A) = 0$, $\det(I) = 1$. Из существования у вырожденной матрицы обратной следовало бы невозможное равенство

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 0 \cdot \det(A^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Для дальнейшего введем понятие матрицы, *присоединенной* к матрице A .

Пусть — квадратная матрица. Заменим каждый ее элемент его алгебраическим дополнением и транспонируем результат. Полученную матрицу называют *присоединенной* к A и обозначают \tilde{A} . Итак,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вычислим произведения $P = A\tilde{A}$ и $Q = \tilde{A}A$.

$$P_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \tilde{a}_{rk} = \sum_{r=1}^n a_{ir} A_{kr} = \begin{cases} \det(A) & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}$$

²Габриель КРАМЕР (1704-1752) — швейцарский математик.

и, аналогично,

$$Q_{ik} = \sum_{r=1}^n \tilde{a}_{ir} a_{rk} = \sum_{r=1}^n A_{ri} a_{rk} = \delta_{ik} \cdot \det(A).$$

Здесь $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}$ – так называемый *символ Кронекера*³.

Итак, $A\tilde{A} = \tilde{A}A = I \cdot \det(A)$.

Если $\det(A) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \right) &= \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \right) \cdot A = I, \text{ т.е.} \\ A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Мы не только доказали обратимость невырожденной матрицы, но и получили "явное выражение" для обратной матрицы.

Серьезное предупреждение. Формула (3.4.1) используется только в теоретических построениях. Вычислять обратную матрицу следует, решая уравнение $AX = I$. Убедиться в этом можно, хотя бы сравнив количества операций, необходимых для реализации этих двух методов.

Пусть теперь $Ax = b$ – система уравнений с квадратной невырожденной матрицей.

Умножив ее слева на $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$, найдем решение

$$x = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \cdot b = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$x_k = \frac{b_1 A_{1k} + \dots + b_n A_{nk}}{\det(A)} = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}, \quad (k = 1 \dots, n), \quad (3.4.2)$$

где B_k - матрица, получающаяся из A заменой ее k -го столбца столбцом свободных членов. Формулы (3.4.2) называют формулами Крамера. Они дают представление о структуре решения системы линейных уравнений с квадратной матрицей и *не должны использоваться для численного решения систем вследствие их очевидной неэффективности*.

³Леопольд КРОНЕКЕР (1823-1891) – немецкий математик, член Берлинской АН и Петербургской АН.