

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

- 1) существуют ли решения у этой системы;
- 2) если решения существуют, то сколько их и как их найти.

1. Число уравнений системы равно числу переменных, а квадратная матрица коэффициентов (ее называют *единичной*) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1.2)$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = b_n \end{cases}$$
$$x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_n = b_n.$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.1.3)$$
[illegible]

Пусть теперь произвольная система вида (1.1.1) задана своей расширенной матрицей. Попытаемся привести матрицу ее коэффициентов к одному из видов (1.1.2) или (1.1.3) с помощью так называемых *элементарных* преобразований, которые не изменяют множество решений системы.

Под элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений понимают:

- 1) изменение порядка уравнений в системе (перестановка строк ее расширенной матрицы);
- 2) изменение порядка расположения переменных в уравнениях (перестановка столбцов в матрице коэффициентов);
- 3) умножение обеих частей уравнения (строки расширенной матрицы) на отличное от нуля число;
- 4) прибавление к одному из уравнений системы другого, умноженного предварительно на некоторое число (прибавление к одной строке расширенной матрицы системы другой ее строки, умноженной на число).

Замечания. 1. Не трудно убедиться в том, что перечисленные элементарные преобразования системы действительно не изменяют множество ее решений.

2. Порядок расположения переменных в уравнении важен и его изменения должны запоминаться.

Теперь мы можем сформулировать алгоритм *полного исключения*, с помощью которого находятся все решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений с расширенной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & b_m^{(0)} \end{array} \right].$$

Алгоритм полного исключения.

1-й шаг.

1) Находим в матрице коэффициентов системы *ведущий* (наибольший по модулю) элемент. Если наибольших по модулю элементов несколько, то в качестве ведущего может быть взят любой из них.

Замечание. Мы предполагаем, естественно, что не все элементы матрицы коэффициентов равны нулю!

2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент в первую строку и в первый столбец. Перестановки столбцов при этом запоминаем!

3) Делим первую строку расширенной матрицы на ведущий элемент. При этом на месте элемента $a_{11}^{(0)}$ появляется единица.

Если матрица состоит из одной строки, работа алгоритма заканчивается. Иначе переходим к п.4.

4) Прибавляя ко второй, третьей и т.д. строкам расширенной матрицы ее первую строку, умноженную соответственно на $-a_{21}^{(0)}$, $-a_{31}^{(0)}$ и т.д., преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \right].$$

Если в расширенной матрице появилась нулевая строка, эту строку можно отбросить, уменьшив тем самым число уравнений в системе. Действительно, нулевая строка соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = 0,$$

которое удовлетворяется тождественно.

Если в расширенной матрице появилась строка вида

$$0 \dots 0 \mid b_r^{(1)},$$

где $b_r^{(1)} \neq 0$, соответствующая уравнению

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = -b_r^{(1)} \neq 0,$$

которое не удовлетворяется ни при каких значениях входящих в него переменных, то преобразованная система несовместна, и, следовательно, несовместна равносильная ей исходная система. Работа алгоритма закончена.

Если после первого шага работа алгоритма не закончилась (не обнаружена несовместность системы и число строк в преобразованной расширенной матрице больше одной), то переходим ко второму шагу.

2-й шаг. Рассмотрим подматрицу преобразованной матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s2}^{(1)} & \dots & a_{sn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что количество строк в ней обозначено буквой s , а не m , так как после первого шага количество строк могло уменьшиться за счет отбрасывания нулевых ($s \leq m$!)

1) Находим в этой подматрице ведущий элемент.

2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент во вторую строку и во второй столбец. Перестановки столбцов при этом запоминаем!

3) Делим вторую строку расширенной матрицы на ведущий элемент, При этом на месте элемента $a_{22}^{(1)}$ появляется единица.

4) Прибавляя ко всем строкам расширенной матрицы, кроме второй, ее вторую строку, умноженную соответственно на $-a_{12}^{(1)}$, $-a_{32}^{(1)}$ и т.д., преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{s3}^{(2)} & \dots & a_{sn}^{(2)} & b_s^{(2)} \end{array} \right].$$

Если после второго шага обнаружена несовместность системы или (после удаления возможно появившихся нулевых строк) расширенная матрица содержит две строки, то работа алгоритма заканчивается. Иначе – переходим к 3-му шагу. И т.д.

Пусть теперь выполнен $(k-1)$ -й шаг, не обнаружена несовместность системы и в матрице осталось $s \geq k$ строк. Переходим к k -му шагу.

k -й шаг. Рассмотрим подматрицу преобразованной матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{sk}^{(1)} & \dots & a_{sn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

1) Находим в этой подматрице ведущий элемент.

2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент в k -ю строку и в k -й столбец. Перестановки столбцов при этом запоминаем!

3) Делим k -ю строку расширенной матрицы на ведущий элемент, При этом на месте элемента $a_{kk}^{(k-1)}$ появляется единица.

4) Прибавляя ко всем строкам расширенной матрицы, кроме k -й, ее k -ю строку, умноженную соответственно на $-a_{1k}^{(k-1)}$, \dots , $-a_{k-1,k}^{(k-1)}$, $-a_{k+1}^{(k-1)}$, \dots , $-a_{s,k}^{(k-1)}$ и т.д., преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,k+1}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{s,k+1}^{(k)} & \dots & a_{sn}^{(k)} & b_s^{(k)} \end{array} \right].$$

Если после k -го шага обнаружена несовместность системы или (после удаления возможно появившихся нулевых строк) расширенная матрица содержит k строк, то работа алгоритма заканчивается. Иначе – переходим к $k+1$ -му шагу. И т.д.

Очевидно, что после выполнения не более, чем m шагов (m – число уравнений системы) работа алгоритма полного исключения заканчивается одним из трех исходов:

- 1) обнаруживается несовместность системы;
- 2) расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_s^{(r)} \end{array} \right] \quad (r - \text{число шагов}),$$

т.е. найдено единственное решение системы;

- 3) расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,s+1}^{(r)} & \dots & a_{1,n}^{(r)} & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,s+1}^{(r)} & \dots & a_{2,n}^{(r)} & b_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{s,s+1}^{(r)} & \dots & a_{s,n}^{(r)} & b_s^{(r)} \end{array} \right],$$

т.е. система имеет бесконечно много решений, которые находятся по формулам (1.1.4).

Терминологическое замечание: Алгоритм полного исключения называют также алгоритмом Гаусса - Жордана.¹

Серьезное предупреждение. Мы предполагаем, что элементы расширенной матрицы системы заданы *точно*, а все арифметические операции выполняются *без округления или усечения*. Только в этом редко встречающемся случае верны доказанные выше утверждения. Влияние погрешностей исходных данных и погрешностей, вносимых при вычислениях, будет рассмотрено в главе 13.

1.2. Однородные системы линейных уравнений

Определение. Система линейных уравнений называется однородной, если все ее свободные члены равны нулю.

Теорема. Если число уравнений в однородной системе меньше, чем число переменных, то система имеет бесконечно много решений.

Доказательство. 1. Всякая однородная система имеет нулевое решение. Это утверждение проверяется подстановкой. Следовательно, однородная система не может быть несовместной.

2. В исходной системе количество строк матрицы коэффициентов меньше количества ее столбцов. При работе алгоритма Гаусса-Жордана количество столбцов не меняется, а количество строк не растет (уменьшиться оно может за счет отбрасывания нулевых строк расширенной матрицы). Следовательно, результирующая матрица коэффициентов квадратной быть не может, т.е. решение не может быть единственным.

¹Карл Фридрих ГАУСС (1777-1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист, внесший существенный вклад практически во все области математики, почетный член Петербургской АН.

Камиль Мари Эдмон ЖОРДАН (1838-1922) – французский математик, член Института Франции, член-корреспондент Петербургской АН.