

## Глава 8. САМОСОПРЯЖЕННАЯ МАТРИЦА

### 8.1. Свойства собственных чисел и собственных векторов эрмитовой матрицы

Напомним, что квадратная матрица  $A$  называется самосопряженной (эрмитовой), если  $A^* = A$ .

1. Собственные числа эрмитовой матрицы вещественны.

Доказательство. Пусть  $A^* = A$ ,  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ .

По свойству скалярного произведения

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^* x \rangle = \langle x, Ax \rangle.$$

Далее

$$\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle; \quad \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Следовательно,

$$\lambda \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Сокращая на  $\langle x, x \rangle \neq 0$ , получим  $\lambda = \bar{\lambda}$ , т.е.  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Собственные векторы эрмитовой матрицы, соответствующие попарно различным собственным числам, ортогональны. (Напомним, что в случае произвольной квадратной матрицы попарное различие собственных чисел влекло за собой лишь линейную независимость соответствующих собственных векторов).

Доказательство. Пусть  $A^* = A$ ;  $Ax = \lambda x$ ,  $Ay = \mu y$ ;  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ .

Тогда

$$\langle Ax, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle; \quad \langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle : (\mu \in \mathbb{R}).$$

Отсюда

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle, \quad (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

Но  $\lambda \neq \mu$  и, следовательно,  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Существенное свойство эрмитовой матрицы устанавливает

Теорема. У любой эрмитовой матрицы существует собственный ортонормированный базис.

Доказательство проведем индукцией по порядку матрицы.

Для матрицы порядка 1 утверждение теоремы очевидно. Пусть оно доказано для матриц порядка  $k-1$ . Рассмотрим произвольную эрмитову матрицу  $A$  порядка  $k$  и найдем какой-нибудь корень  $\lambda_1$  ее характеристического полинома. Пусть  $s^{(1)}$  — *нормированный* собственный вектор, соответствующий  $\lambda_1$ .

Дополним "набор", состоящий из одного вектора до ортонормированного базиса в  $\mathbb{C}^k$  векторами  $g^{(2)}, \dots, g^{(k)}$  (см. теорему из п.7.4). Собственные векторы  $s^{(2)}, \dots, s^{(k)}$  будем искать в виде

$$s^{(r)} = \alpha_2^{(r)} g^{(2)} + \dots + \alpha_k^{(r)} g^{(k)} \quad \text{или} \quad s^{(r)} = D \alpha^{(r)},$$

где

$$D = [s^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(k)}], \quad \alpha^{(r)} = [0, \alpha_2^{(r)}, \dots, \alpha_k^{(r)}]^T.$$

Заметим, что  $D$  унитарна по построению и  $D^* D = I$ .

По определению собственного вектора

$$A s^{(r)} = \lambda_r s^{(r)} \quad \text{или} \quad A D \alpha^{(r)} = \lambda_r D \alpha^{(r)}, \quad \text{откуда} \quad D^* A D \alpha^{(r)} = \lambda_r \alpha^{(r)}. \quad (8.1.1)$$

Матрица  $AD$  имеет вид

$$AD = [A s^{(1)}, A g^{(2)}, \dots, A g^{(k)}] = [\lambda_1 s^{(1)}, A g^{(2)}, \dots, A g^{(k)}].$$

Рассмотрим теперь эрмитову (проверьте это) матрицу

$$D^* A D = \begin{bmatrix} c & \vdots & d^* \\ \dots & & \dots \\ d & \vdots & B \end{bmatrix}$$

Здесь  $B$  – эрмитова матрица порядка  $(k-1)$ ,  $c = \langle \lambda_1 s^{(1)}, s^{(1)} \rangle = \lambda_1$  –  $(1 \times 1)$ -матрица,  $d = \theta_{k-1}$  – нулевой столбец высоты  $(k-1)$ :

$$d_r = \langle Ag^{(r)}, s^{(1)} \rangle = \langle g^{(r)}, As^{(1)} \rangle = \langle \lambda_1 g^{(r)}, s^{(1)} \rangle = 0,$$

так как  $g^{(r)}$  ортогональны  $s^{(1)}$  по построению. Итак,

$$D^*AD = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

$D$  – унитарная матрица. Следовательно,  $D^* = D^{-1}$ , матрицы  $D^*AD$  и  $A$  подобны, и их характеристические полиномы совпадают

$$P_A(\lambda) = P_{D^*AD}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot P_B(\lambda).$$

Поэтому собственные числа матрицы  $B$  являются также собственными числами матрицы  $A$ . Верно и обратное (за исключением, может быть, числа  $\lambda_1$ ).

Система уравнений (8.1.1) для определения собственных чисел  $\lambda_r$  и векторов  $\alpha^{(r)}$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & \vdots & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2^{(r)} \\ \vdots \\ \alpha_k^{(r)} \end{bmatrix} = \lambda_r \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2^{(r)} \\ \vdots \\ \alpha_k^{(r)} \end{bmatrix}.$$

Она, очевидно, равносильна системе

$$B \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2^{(r)} \\ \vdots \\ \alpha_k^{(r)} \end{bmatrix} = \lambda_r \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2^{(r)} \\ \vdots \\ \alpha_k^{(r)} \end{bmatrix}.$$

По индукционному предположению матрица  $B$  имеет ортонормированный собственный базис в  $\mathbb{C}^{k-1}$ . Обозначим его векторы  $w^{(2)}, \dots, w^{(k)}$ .

Положим  $\alpha^{(r)} = [0, w_1^{(r)}, \dots, w_{k-1}^{(r)}]^T$ ,  $r = 2, \dots, k$ . Тогда из  $Bw^{(r)} = \lambda_r w^{(r)}$  имеем

$$D^*AD\alpha^{(r)} = \lambda_r \alpha^{(r)},$$

откуда  $A(D\alpha^{(r)}) = \lambda_r(D\alpha^{(r)})$ , т.е.  $As^{(r)} = \lambda_r s^{(r)}$ . Но  $w^{(r)}$  ортонормированы, следовательно, и  $\alpha^{(r)}$  ортонормированы, а поскольку умножение на унитарную матрицу  $D$  сохраняет скалярное произведение и норму, ортонормированы и векторы  $s^{(r)}$ . Они также ортогональны нормированному вектору  $s^{(1)}$ .

Ортонормированный собственный базис матрицы построен, и теорема доказана.

Следствие. Всякая эрмитова матрица  $A$  подобна диагональной матрице  $\Lambda$ , на диагонали которой стоят собственные числа  $A$ .

Матрица  $S$ , с помощью которой осуществляется подобие, унитарна, ибо ее столбцы – ортонормированные собственные векторы матрицы  $A$ . Говорят, что матрицы  $A$  и  $S^{-1}AS = \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  *унитарно подобны*.

Домножив равенство  $S^{-1}AS = \Lambda$  на  $S$  слева и на  $S^* = S^{-1}$  справа, получим

$$A = SAS^*.$$

Такое представление эрмитовой матрицы называется ее *спектральным разложением*.

Пример.  $A = \begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix}$ .  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 3$ .

Корни характеристического полинома  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$  – собственные числа матрицы  $A$ .  
Решив однородную систему

$$(A - 2 \cdot I)x^{(1)} = \theta \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} -2 & i & 1 \\ -i & 2 & -i \\ 1 & i & -2 \end{bmatrix} x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

и нормировав полученное решение, найдем нормированный собственный вектор, соответствующий  $\lambda_1 = 2$  :  
 $s^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, -i, 1]^T$ .

Теперь решаем однородную систему

$$(A - (-1) \cdot I)x^{(2)} = \theta \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & -i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

и нормируем полученное решение. Получаем нормированный собственный вектор, соответствующий  $\lambda_2 = -1$  :  
 $s^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, -1]^T$ .

Поскольку  $\lambda_3 = \lambda_2 = -1$ , для определения третьего собственного вектора получаем уже известную систему уравнений

$$(A - (-1) \cdot I)x^{(3)} = \theta \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & -i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix} x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.1.1)$$

Однако требование ортогональности собственных векторов дает дополнительное уравнение  $\langle s^{(2)}, x^{(3)} \rangle = 0$  или  $x_1^{(3)} - x_3^{(3)} = 0$ . Добавляя его к (8.1.1), получаем систему

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & -i \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Нормировав ее *ненулевое* решение, находим  $s^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1, 2i, 1]^T$ .

Запишем спектральное разложение матрицы  $A$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{i}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = SAS^*.$$

## 8.2. Численное решение полной проблемы собственных значений для эрмитовой матрицы. Метод Якоби

В п.6.2 было указано, что очевидный алгоритм решения полной проблемы собственных значений, вытекающий из определения собственных чисел и собственных векторов, неприменим из-за его численной неустойчивости. Практическое применение получили методы, основанные на других идеях. Один из них – метод Якоби<sup>1</sup> – и рассматривается ниже.

Прежде чем начать описание метода Якоби, применим известный прием (овеществление), позволяющий свести задачу с эрмитовой матрицей к задаче с вещественной матрицей вдвое большего порядка. Если

$$A = A_1 + iA_2, \quad x = x^{(1)} + ix^{(2)},$$

<sup>1</sup>Карл Густав Якоб ЯКОБИ (1804-1851) – немецкий математик, член Лондонского Королевского общества и многих академий Европы.

где  $A_1, A_2$  – вещественные  $(n \times n)$ -матрицы, а  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ , то, разделяя вещественные и мнимые части (см. п.2.5), уравнение можно переписать в виде (не забудьте, что собственное число эрмитовой матрицы вещественно!)

$$\begin{bmatrix} A_1 & \vdots & -A_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_2 & \vdots & A_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \dots \\ x^{(2)} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \dots \\ x^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Заметьте, что условие  $A^* = A$  равносильно двум условиям:  $A_1 = A_1^* = A_1^T$  и  $A_2 = -A_2^* = -A_2^T$ . Поэтому получившаяся вещественная матрица порядка  $2n$  симметрична. Далее, поскольку наряду с собственным вектором  $x = x^{(1)} + ix^{(2)}$  матрица  $A$  имеет и собственный вектор  $ix = -x^{(2)} + ix^{(1)}$ , у полученной вещественной матрицы собственному числу  $\lambda$  будет соответствовать пара ортогональных собственных векторов  $\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \dots \\ x^{(2)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x^{(2)} \\ \dots \\ x^{(1)} \end{bmatrix}$ . В результате из  $n$  векторов собственного базиса в  $\mathbb{C}^n$  мы получим  $2n$  векторов собственного базиса в  $\mathbb{R}^{2n}$  (читателю предоставляется возможность доказать самостоятельно, что из  $\langle x, y \rangle = 0$  следует  $\left\langle \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \dots \\ x^{(2)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ \dots \\ y^{(2)} \end{bmatrix} \right\rangle = 0$ , а из

$$\|x\| = 1 \text{ следует } \left\| \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \dots \\ x^{(2)} \end{bmatrix} \right\| = 1).$$

Таким образом, полная проблема собственных значений для эрмитовой матрицы сводится к полной проблеме собственных значений для симметричной вещественной матрицы. С такими матрицами мы и будем иметь дело в этом пункте.

Итак, пусть  $A$  – вещественная симметричная матрица. Известно (п.6.3), что если найдется такая ортогональная матрица  $U$ , что  $\Lambda = U^T A U$  – диагональная матрица, то на диагонали  $\Lambda$  будут стоять собственные числа матрицы  $A$ , а столбцы матрицы  $U$  образуют собственный базис матрицы  $A$ . Будем строить матрицы, унитарно подобные матрице  $A$ , добиваясь превращения всех внедиагональных элементов в нули.

На первом шаге добьемся обращения в нуль наибольшего по модулю внедиагонального элемента (назовем его ведущим элементом первого шага). Будем считать, что ведущие элементы (вследствие симметрии матрицы их два) стоят на пересечении  $i$ -й и  $k$ -й строк и  $i$ -го и  $k$ -го столбцов. Будем называть эти строки и столбцы *отмеченными*.

Ниже схематически изображена исходная матрица  $A^{(0)}$  с отмеченной парой ведущих элементов первого шага –  $a_{ik}^{(0)}$  и  $a_{ki}^{(0)}$  ( $|a_{ik}^{(0)}| = \max_{p \neq m} |a_{pm}^{(0)}|$ ),

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \vdots & \dots & a_{ik}^{(0)} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & a_{ki}^{(0)} & \dots & \vdots & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Представим результат первого шага – матрицу  $A^{(1)}$ , унитарно подобную  $A$ , в виде  $A^{(1)} = U^{(1)T} A^{(0)} U^{(1)}$ , где  $U^{(1)}$  – ортогональная матрица, изображенная схематически ниже.

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \vdots & \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{O} \\ \dots & c_1 & \dots & -s_1 & \dots \\ \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{I} & \vdots & \mathbb{O} \\ \dots & s_1 & \dots & c_1 & \dots \\ \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

Символом  $\mathbb{I}$  обозначена единичная подматрица, символом  $\mathbb{O}$  – нулевая подматрица. Матрица  $U^{(1)}$  получается из единичной путем замены двух диагональных и двух внедиагональных элементов, стоящих на пересечении

отмеченных строк и столбцов:

$$u_{ii}^{(1)} = u_{kk}^{(1)} = c_1 = \cos(\varphi_1); \quad u_{ki}^{(1)} = -u_{ik}^{(1)} = s_1 = \sin(\varphi_1)$$

( $\varphi_1$  – угол, который находится из условия  $a_{ik}^{(1)} = a_{ik}^{(0)} = 0$ .)

По определению умножения матриц из  $A^{(1)} = U^{(1)T} A^{(0)} U^{(1)}$  следует, что

$$a_{pm}^{(1)} = \sum_{r=1}^n u_{pr}^{(1)T} \sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{jm}^{(1)}. \quad (8.2.1)$$

Покажем, что элементы матрицы, *не стоящие в отмеченных строках и столбцах*, не изменяются. Рассмотрим внутреннюю сумму в (8.2.1). Если  $m$ -й столбец не выделен, то эта сумма состоит из одного слагаемого

$$\sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{jm}^{(1)} = a_{rm}^{(0)} u_{mm}^{(1)} = a_{rm}^{(0)}.$$

Если  $p$ -я строка не выделена, то внешняя сумма тоже состоит из одного слагаемого

$$a_{pm}^{(1)} = \sum_{r=1}^n u_{pr}^{(1)T} a_{rm}^{(0)} = u_{pp}^{(1)T} a_{pm}^{(0)} = a_{pm}^{(0)}.$$

Вычислим теперь элемент матрицы  $A^{(1)}$ , стоящий в *отмеченном столбце* и в *неотмеченной строке*. Пусть  $m = i$ ,  $p \neq i$ ,  $p \neq k$ . Перепишем (8.2.1):

$$a_{pi}^{(1)} = \sum_{r=1}^n u_{pr}^{(1)T} \sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{ji}^{(1)}.$$

Внутренняя сумма содержит теперь два слагаемых

$$\sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{ji}^{(1)} = a_{ri}^{(0)} u_{ii}^{(1)} + a_{rk}^{(0)} u_{ki}^{(1)} = a_{ri}^{(0)} c_1 + a_{rk}^{(0)} s_1,$$

а внешняя – из одного

$$a_{pi}^{(1)} = u_{pp}^{(1)T} (a_{pi}^{(0)} c_1 + a_{pk}^{(0)} s_1) = a_{pi}^{(0)} c_1 + a_{pk}^{(0)} s_1.$$

Положив  $m = k$ , получим

$$a_{pk}^{(1)} = u_{pp}^{(1)T} (a_{pk}^{(0)} c_1 - a_{pi}^{(0)} s_1) = a_{pk}^{(0)} c_1 - a_{pi}^{(0)} s_1.$$

Заметим, что

$$\left(a_{pi}^{(1)}\right)^2 + \left(a_{pk}^{(1)}\right)^2 = \left(a_{pi}^{(0)}\right)^2 + \left(a_{pk}^{(0)}\right)^2,$$

т.е. сумма квадратов элементов выделенных столбцов, стоящих в одной (не отмеченной) строке, не меняется. В силу симметрии матриц не меняется и сумма квадратов элементов отмеченных строк, стоящих в одном (не отмеченном) столбце.

Осталось найти элемент  $a_{ik}^{(1)}$ , получающийся на месте ведущего элемента первого шага.

$$\begin{aligned} a_{ik}^{(1)} &= \sum_{r=1}^n u_{ir}^{(1)T} \sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{jk}^{(1)} = \\ &= \sum_{r=1}^n u_{ir}^{(1)T} \left( a_{ri}^{(0)} u_{ik}^{(1)} + a_{rk}^{(0)} u_{kk}^{(1)} \right) = \sum_{r=1}^n u_{ir}^{(1)T} \left( -a_{ri}^{(0)} s_1 + a_{rk}^{(0)} c_1 \right) = \\ &= u_{ii}^{(1)} \left( -a_{ii}^{(0)} s_1 + a_{ik}^{(0)} c_1 \right) + u_{ik}^{(1)} \left( -a_{ki}^{(0)} s_1 + a_{kk}^{(0)} c_1 \right) = \\ &= -a_{ii}^{(0)} c_1 s_1 + a_{ik}^{(0)} c_1^2 - a_{ki}^{(0)} s_1^2 + a_{kk}^{(0)} c_1 s_1. \end{aligned}$$

Приравнивая полученное выражение нулю и вспоминая, что  $c_1 = \cos(\varphi_1)$ , а  $s_1 = \sin(\varphi_1)$ , получим уравнение для определения  $\varphi_1$ :

$$(\cos^2(\varphi_1) - \sin^2(\varphi_1)) a_{ik}^{(0)} = (a_{ii}^{(0)} - a_{kk}^{(0)}) \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_1)$$

(здесь учтено, что  $a_{ik}^{(0)} = a_{ki}^{(0)}$ ). Так как по определению  $a_{ik}^{(0)} \neq 0$  (как наибольший по модулю внедиагональный элемент), это уравнение сводится к виду:

$$\operatorname{ctg}(2\varphi_1) = \frac{a_{ii}^{(0)} - a_{ii}^{(0)}}{2a_{ik}^{(0)}}.$$

Найдя  $\varphi_1$ , получим матрицу  $A^{(1)}$ , унитарно подобную матрице  $A^{(0)}$ .

Обозначим  $Q^{(N)}$  сумму квадратов внедиагональных элементов на шаге с номером  $N$ . Так как  $a_{ik}^{(1)} = a_{ki}^{(1)} = 0$ , а сумма квадратов остальных внедиагональных элементов не изменилась,

$$Q^{(1)} = Q^{(0)} - 2 \left( a_{ik}^{(0)} \right)^2 = Q^{(0)} \left( 1 - 2 \frac{\left( a_{ik}^{(0)} \right)^2}{Q^{(0)}} \right).$$

Так как

$$\left( a_{ik}^{(0)} \right)^2 = \max_{p \neq m} \left( a_{pm}^{(0)} \right)^2, \text{ то } Q^{(0)} \leq \left( a_{ik}^{(0)} \right)^2 \cdot n \cdot (n-1),$$

где  $n$  – порядок матрицы. Отсюда

$$\frac{\left( a_{ik}^{(0)} \right)^2}{Q^{(0)}} \geq \frac{1}{n(n-1)} \text{ и } Q^{(1)} \leq Q^{(0)} \left( 1 - \frac{2}{n(n-1)} \right). \quad (8.2.3)$$

На втором шаге алгоритма Якоби мы построим матрицу  $A^{(2)}$ , унитарно подобную  $A^{(1)}$  (а, следовательно, и  $A^{(0)}$ ), у которой будут равны нулю ведущие элементы матрицы  $A^{(1)}$ .

Здесь можно было бы поставить слова "и так далее", но... к сожалению, на втором шаге те элементы, которые на первом шаге были обнулены, вообще говоря, станут снова отличными от нуля!

Поэтому, в отличие, скажем, от алгоритма Гаусса-Жордана, процесс преобразования по алгоритму Якоби, вообще говоря, бесконечен. Однако из (8.2.3) видно, что при итерациях по алгоритму Якоби последовательность сумм квадратов внедиагональных элементов убывает не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем  $\left( 1 - \frac{2}{n(n-1)} \right)$  и ее предел равен нулю:

$$Q^{(N)} \leq Q^{(0)} \left( 1 - \frac{2}{n(n-1)} \right)^N \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} Q^{(N)} = 0.$$

Можно ожидать, что диагональные элементы в последовательности матриц  $A^{(N)}$  с ростом  $N$  приближаются к собственным числам матрицы  $A$ . Более подробный анализ показывает, что на интервале

$$\left[ a_{ii}^{(N)} - \sqrt{Q^{(N)}}, a_{ii}^{(N)} + \sqrt{Q^{(N)}} \right]$$

содержится хотя бы одно собственное число матрицы  $A$ .

Естественно назвать этот интервал оценкой собственного числа. Длина интервала-оценки может быть сделана как угодно малой за счет количества итераций.

После шага с номером  $N$

$$A^{(N)} = V^{(N)T} A V^{(N)}, \text{ где } V^{(N)} = U^{(1)} \cdot \dots \cdot U^{(N)}.$$

Матрицы  $V^{(N)}$  унитарны, и их столбцы являются приближениями для собственных векторов матрицы  $A$ .

Эффективные численные алгоритмы, реализованные в средах конечного пользователя и в библиотеках стандартных Фортран-программ, обеспечивают решение полной проблемы собственных значений для *эрмитовых* матриц с машинной точностью.

Терминологическое замечание. Матрица  $U^{(1)}$  осуществляет поворот на угол  $\varphi_1$  в плоскости  $X_i O X_k$ , проходящей через  $i$ -ю и  $k$ -ю координатные оси в пространстве  $\mathbb{R}^n$  (сравните с примером в п.7.6). Матрица  $V^{(N)}$  – произведение нескольких матриц плоских вращений. Поэтому метод Якоби иногда называют *методом вращений*.

---

Серьезное предупреждение. В случае неэрмитовых матриц ситуация осложняется. Как было показано, такие матрицы могут и не иметь полного набора линейно независимых собственных векторов. Несмотря на существование алгоритмов, *призванных* решать полную проблему собственных значений для произвольных матриц и реализованных и в средах конечного пользователя и в библиотеках стандартных Фортран-программ, *результат не гарантируется*. Мы настоятельно рекомендуем руководствоваться рекомендацией Хемминга<sup>2</sup>: "Хотя существуют прямые методы для несимметричных матриц, с ними надо быть осторожными из-за внутренней неустойчивости задачи, и если матрица велика, то лучше проконсультироваться со специалистом, прежде чем растрачивать машинное время".

---

<sup>2</sup>Ричард Уэсли ХЕММИНГ (1915-1998) – американский математик. В теории кодирования широко известен "код Хемминга".