

Глава 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Метод полного исключения

Система m линейных алгебраических уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \quad (1.1.1)$$

Здесь буквой a с двумя индексами обозначены заданные числа – *коэффициенты системы* (первый индекс – номер уравнения, второй – номер переменной), буквой b с одним индексом – также заданные числа – *свободные члены* уравнений. Буквой x с одним индексом обозначены переменные. Решением системы (1.1.1) называется упорядоченный набор из n чисел $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$, подстановка которых вместо переменных (\tilde{x}_1 вместо x_1, \dots, \tilde{x}_n вместо x_n) превращает все уравнения системы в верные числовые равенства.

Систему (1.1.1) можно записать короче, если ввести удобные обозначения.

Определение. Прямоугольную числовую таблицу из m строк и n столбцов будем называть *матрицей размера $m \times n$* или *($m \times n$) -матрицей*.

Примеры.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ – матрица размера 2×3 ;

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ – матрица размера 3×2 .

Матрица размера $m \times m$ называется *квадратной*, а число m – ее *порядком*. Элементы квадратной матрицы, у которых совпадают номер строки и номер столбца, называются *диагональными*; остальные – *внедиагональными*.

Матрицу размера $n \times 1$ будем называть *матрицей-столбцом* (или просто *столбцом*), а число n – *высотой столбца*.

Матрицу размера $1 \times m$ будем называть *матрицей-строкой* (или просто *строкой*), а число m – *шириной строки*.

Квадратную матрицу 1-го порядка (одноэлементную) мы будем отождествлять с ее элементом – числом.
Примеры.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ – столбец высоты 2; $[1 \ 2 \ 3]$ – строка ширины 3;

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ – квадратная матрица порядка 2.

Используя введенные термины, зададим систему (1.1.1) матрицей ее коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

и столбцом свободных членов

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Иногда матрицу коэффициентов и столбец свободных членов объединяют в *расширенную матрицу* системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Пример. Система

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \end{cases}.$$

имеет матрицу коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

и столбец свободных членов

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Можно объединить их в расширенную матрицу системы

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

В отношении системы (1.1.1) возникают два вопроса:

- 1) существуют ли решения у этой системы;
 - 2) если решения существуют, то сколько их и как их найти.

Прежде чем отвечать на эти вопросы рассмотрим два частных случая.

1. Число уравнений системы равно числу переменных, а квадратная матрица коэффициентов (ее называют *единичной*) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1.2)$$

Запишем эту систему в "школьной" форме

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Очевидно, что система имеет решение, оно единственно, и, более того, уже фактически найдено:

$$x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_n = b_n.$$

2. Число уравнений системы (m) меньше числа переменных (n) и $(m \times n)$ -матрица коэффициентов имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Запишем эту систему в виде

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ x_2 & = & b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots & & \dots \\ x_m & = & b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n \end{array} \right. . \quad (1.1.4)$$

Задав произвольно значения переменных x_{m+1}, \dots, x_n и вычислив x_1, \dots, x_m по формулам (1.1.4), мы получим, очевидно, решение системы.

Пусть теперь произвольная система вида (1.1.1) задана своей расширенной матрицей. Попытаемся привести матрицу ее коэффициентов к одному из видов (1.1.2) или (1.1.3) с помощью так называемых *элементарных* преобразований, которые не изменяют множество решений системы.

Под элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений понимают:

- 1) изменение порядка уравнений в системе (перестановка строк ее расширенной матрицы);
- 2) изменение порядка расположения переменных в уравнениях (перестановка столбцов в матрице коэффициентов);
- 3) умножение обеих частей уравнения (строки расширенной матрицы) на отличное от нуля число;
- 4) прибавление к одному из уравнений системы другого, умноженного предварительно на некоторое число (прибавление к одной строке расширенной матрицы системы другой ее строки, умноженной на число).

Замечания. 1. Не трудно убедиться в том, что перечисленные элементарные преобразования системы действительно не изменяют множество ее решений.

2. Порядок расположения переменных в уравнении важен и его изменения должны запоминаться.

Теперь мы можем сформулировать алгоритм *полного исключения*, с помощью которого находятся все решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений с расширенной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & b_m^{(0)} \end{array} \right].$$

Алгоритм полного исключения.

1-й шаг.

1) Находим в матрице коэффициентов системы *ведущий* (наибольший по модулю) элемент. Если наибольших по модулю элементов несколько, то в качестве ведущего может быть взят любой из них.

Замечание. Мы предполагаем, естественно, что не все элементы матрицы коэффициентов равны нулю!

2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент в первую строку и в первый столбец. Перестановки столбцов при этом запоминаем!

3) Делим первую строку расширенной матрицы на ведущий элемент. При этом на месте элемента $a_{11}^{(0)}$ появляется единица.

Если матрица состоит из одной строки, работа алгоритма заканчивается. Иначе переходим к п.4.

4) Прибавляя ко второй, третьей и т.д. строкам расширенной матрицы ее первую строку, умноженную соответственно на $-a_{21}^{(0)}, -a_{31}^{(0)}$ и т.д., преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \right].$$

Если в расширенной матрице появилась нулевая строка, эту строку можно отбросить, уменьшив тем самым число уравнений в системе. Действительно, нулевая строка соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = 0,$$

которое удовлетворяется тождественно.

Если в расширенной матрице появилась строка вида

$$0 \dots 0 | b_r^{(1)},$$

где $b_r^{(1)} \neq 0$, соответствующая уравнению

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = -b_r^{(1)} \neq 0,$$

которое не удовлетворяется ни при каких значениях входящих в него переменных, то преобразованная система несовместна, и, следовательно, несовместна равносильная ей исходная система. Работа алгоритма закончена.

Если после первого шага работа алгоритма не закончилась (не обнаружена несовместность системы и число строк в преобразованной расширенной матрице больше одной), то переходим ко второму шагу.

2-й шаг. Рассмотрим подматрицу преобразованной матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} \dots a_{2n}^{(1)} \\ \dots \\ a_{s2}^{(1)} \dots a_{sn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что количество строк в ней обозначено буквой s , а не m , так как после первого шага количество строк могло уменьшиться за счет отбрасывания нулевых ($s \leq m!$)

- 1) Находим в этой подматрице ведущий элемент.
- 2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент во вторую строку и во второй столбец. Перестановки столбцов при этом запоминаем!
- 3) Делим вторую строку расширенной матрицы на ведущий элемент. При этом на месте элемента $a_{22}^{(1)}$ появляется единица.
- 4) Прибавляя ко всем строкам расширенной матрицы, кроме второй, ее вторую строку, умноженную соответственно на $-a_{12}^{(1)}, -a_{32}^{(1)}$ и т.д., преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} \dots a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} \dots a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{s3}^{(2)} \dots a_{sn}^{(2)} & b_s^{(2)} \end{array} \right].$$

Если после второго шага обнаружена несовместность системы или (после удаления возможно появившихся нулевых строк) расширенная матрица содержит две строки, то работа алгоритма заканчивается. Иначе – переходим к 3-му шагу. И т.д.

Пусть теперь выполнен $(k-1)$ -й шаг, не обнаружена несовместность системы и в матрице осталось $s \geq k$ строк. Переходим к k -му шагу.

k -й шаг. Рассмотрим подматрицу преобразованной матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} \dots a_{kn}^{(k)} \\ \dots \\ a_{sk}^{(1)} \dots a_{sk}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

- 1) Находим в этой подматрице ведущий элемент.
- 2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент в k -ю строку и в k -й столбец. Перестановки столбцов при этом запоминаем!
- 3) Делим k -ю строку расширенной матрицы на ведущий элемент. При этом на месте элемента $a_{kk}^{(k-1)}$ появляется единица.
- 4) Прибавляя ко всем строкам расширенной матрицы, кроме k -й, ее k -ю строку, умноженную соответственно на $-a_{1k}^{(k-1)}, \dots, -a_{k-1,k}^{(k-1)}, -a_{k+1}^{(k-1)}, \dots, -a_{s,k}^{(k-1)}$ и т.д., преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 \dots 0 & a_{1,k+1}^{(k)} \dots a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & 1 \dots 0 & a_{2,k+1}^{(k)} \dots a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & a_{k,k+1}^{(k)} \dots a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & a_{s,k+1}^{(k)} \dots a_{sn}^{(k)} & b_s^{(k)} \end{array} \right].$$

Если после k -го шага обнаружена несовместность системы или (после удаления возможно появившихся нулевых строк) расширенная матрица содержит k строк, то работа алгоритма заканчивается. Иначе – переходим к $k+1$ -му шагу. И т.д.

Очевидно, что после выполнения не более, чем m шагов (m – число уравнений системы) работа алгоритма полного исключения заканчивается одним из трех исходов:

- 1) обнаруживается несовместность системы;
- 2) расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^{(r)} \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_s^{(r)} \end{array} \right] \quad (r - \text{число шагов}),$$

т.е. найдено единственное решение системы;

- 3) расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,s+1}^{(r)} \dots a_{1,n}^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,s+1}^{(r)} \dots a_{2,n}^{(r)} \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{s,s+1}^{(r)} \dots a_{s,n}^{(r)} \end{array} \right],$$

т.е. система имеет бесконечно много решений, которые находятся по формулам (1.1.4).

Терминологическое замечание: Алгоритм полного исключения называют также алгоритмом Гаусса - Жордана.¹

Серьезное предупреждение. Мы предполагаем, что элементы расширенной матрицы системы заданы *точно*, а все арифметические операции выполняются *без округления или усечения*. Только в этом редко встречающемся случае верны доказанные выше утверждения. Влияние погрешностей исходных данных и погрешностей, вносимых при вычислениях, будет рассмотрено в главе 13.

1.2. Однородные системы линейных уравнений

Определение. Система линейных уравнений называется однородной, если все ее свободные члены равны нулю.

Теорема. Если число уравнений в однородной системе меньше, чем число переменных, то система имеет бесконечно много решений.

Доказательство. 1. Всякая однородная система имеет нулевое решение . Это утверждение проверяется подстановкой. Следовательно, однородная система не может быть несовместной.

2. В исходной системе количество строк матрицы коэффициентов меньше количества ее столбцов. При работе алгоритма Гаусса-Жордана количество столбцов не меняется, а количество строк не растет (уменьшиться оно может за счет отбрасывания нулевых строк расширенной матрицы). Следовательно, результирующая матрица коэффициентов квадратной быть не может, т.е. решение не может быть единственным.

¹Карл Фридрих ГАУСС (1777-1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист, внесший существенный вклад практически во все области математики, почетный член Петербургской АН.

Камиль Мари Эдмон ЖОРДАН (1838-1922) – французский математик, член Института Франции, член-корреспондент Петербургской АН.