

9. ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ \mathbb{C}^n И \mathbb{R}^n

9.1. Линейные формы

В п.6.1 было показано, что всякая матрица A размера $m \times n$ порождает линейное отображение \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m : $x \rightarrow Ax$. В частном случае, когда $m = 1$, значения этого отображения – комплексные числа. Такое отображение называют *линейным функционалом* (*линейной формой*).

Итак, $(1 \times n)$ -матрица (матрица-строка) порождает линейный функционал – отображение \mathbb{C}^n в \mathbb{C} .

Пусть $A = [a_1, \dots, a_n]$. Тогда $Ax = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Введем вектор-столбец $a = A^* = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]^T$. Тогда наш линейный функционал может быть записан в терминах скалярного произведения

$$Ax = a^*x = \langle x, a \rangle.$$

Этот способ записи мы и будем, как правило, использовать.

Замечание. Вектор с вещественными компонентами порождает, очевидно, вещественный линейный функционал на \mathbb{R}^n .

Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию линейной формы $y = \langle x, a \rangle$, заданной на \mathbb{R}^n ($a \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$).

Если $a = \theta$, то $y \equiv 0$. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что $a \neq \theta$.

Для $n = 1$ $a = [a]$, $x = [x]$, $y = ax$.

График этой формы – прямая в \mathbb{R}^2 ("на плоскости"), проходящая через начало координат.

Для $n = 2$ $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \langle x, a \rangle = a_1x_1 + a_2x_2$.

График этой формы – плоскость в \mathbb{R}^3 , проходящая через начало координат.

Полезно рассмотреть также линии уровня этого функционала, т.е. линии в \mathbb{R}^2 , на которых функционал сохраняет постоянное значение. Полагая $y = \text{const}$, получим уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 = \text{const}. \quad (9.1.1)$$

Как известно, это уравнение определяет прямую.

Итак, график вещественного линейного функционала, заданного на \mathbb{R}^2 , – это плоскость в \mathbb{R}^3 , проходящая через начало координат, а его линии уровня образуют однопараметрическое семейство прямых в \mathbb{R}^2 .

Рассмотрим прямую из этого семейства

$$\langle x, a \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (9.1.2)$$

и зафиксируем на ней точку $x^{(0)}$. Вычитая из (9.1.2) равенство $\langle x^{(0)}, a \rangle = c$, получим

$$\langle x - x^{(0)}, a \rangle = 0,$$

т.е. векторы $x - x^{(0)}$ и a ортогональны, и соответствующие им направленные отрезки перпендикулярны.

Но отрезок $x - x^{(0)}$, очевидно, параллелен нашей прямой. Поэтому все прямые семейства перпендикулярны \vec{a} , и, следовательно, параллельны между собой (рис.9.1).

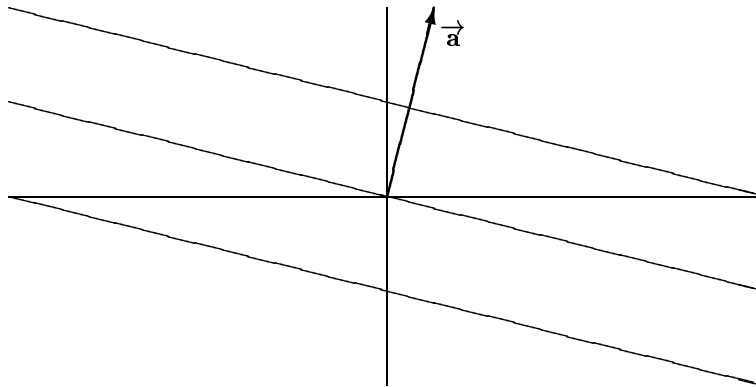


Рис.9.1

Замечания. 1. Как известно из школьного курса, любая прямая на плоскости задается уравнением (9.1.1). Поэтому любая прямая на плоскости является линией уровня некоторого линейного функционала.

2. Множество точек \mathbb{R}^2 , удовлетворяющих *линейному неравенству* $\langle x^{(0)}, a \rangle \leq c$, очевидно, есть объединение линий уровня $\langle x^{(0)}, a \rangle = \gamma$ при любых $\gamma \leq c$. Это одна из двух *полуплоскостей*, на которые прямая $\langle x^{(0)}, a \rangle = \gamma$ делит плоскость. Множество точек, удовлетворяющих неравенству $\langle x^{(0)}, a \rangle \geq c$, образует вторую полуплоскость (рис.9.2).

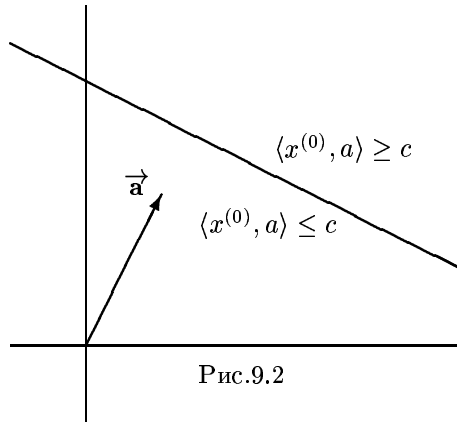


Рис.9.2

Для $n = 3$ $a = [a_1, a_2, a_3]^T$, $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $y = \langle x, a \rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$.

График этого функционала построить невозможно, ибо три отпущенные нам природой оси декартовой системы координат заняты значениями компонент вектора x , и значения функционала девать уже некуда. Приходится ограничиться рассмотрением его *поверхностей уровня*, уравнения которых получаем, фиксируя значения функционала. Полагая $y = const.$, имеем

$$\langle x, a \rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$$

– уравнение плоскости в \mathbb{R}^3 .

Итак, поверхности уровня нашего функционала образуют однопараметрическое семейство плоскостей.

Зафиксировав на одной из плоскостей этого семейства точку $x^{(0)}$, для любой другой точки x этой плоскости имеем $\langle x, a \rangle = c = \langle x^{(0)}, a \rangle$. Отсюда $\langle x - x^{(0)}, a \rangle = 0$ и, следовательно, направленный отрезок $\overrightarrow{x - x^{(0)}}$ перпендикулярен \vec{a} .

Поскольку x и $x^{(0)}$ лежат в нашей плоскости, отрезок $\overrightarrow{x - x^{(0)}}$ компланарен ей. Следовательно, эта плоскость перпендикулярна \vec{a} , и, значит, все плоскости семейства параллельны между собой.

Как и в двухмерном случае, каждая плоскость в \mathbb{R}^3 является поверхностью уровня некоторого линейного функционала; множество точек, удовлетворяющих линейному неравенству $\langle x, a \rangle \leq c$ и множество точек, удовлетворяющих линейному неравенству $\langle x, a \rangle \geq c$, образуют два полупространства, разделяемых плоскостью $\langle x, a \rangle = c$.

9.2 Квадратичные формы

Пусть A – эрмитова матрица порядка n , $x \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^*x \rangle = \langle x, Ax \rangle,$$

а так как по свойству скалярного произведения $\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle x, Ax \rangle}$, то $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Определение. Вещественная числовая функция, заданная на \mathbb{C}^n правилом $x \rightarrow \langle Ax, x \rangle$, где A – эрмитова матрица порядка n , называется *квадратичной формой* (*квадратичным функционалом*).

Выразим значение квадратичной формы через координаты вектора x :

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j;$$

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n (Ax)_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}|x_i|^2 + \sum_{l \neq i} a_{il}x_i \bar{x}_l.$$

Наличие слагаемых с попарными произведениями координат затрудняет исследование квадратичной формы. Покажем, что от этого затруднения можно избавиться, если использовать для представления вектора ортонормированный собственный базис эрмитовой (!) матрицы A .

Пусть $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ – диагональная матрица, диагональ которой состоит из собственных чисел эрмитовой матрицы A , $S = [s^{(1)}, \dots, s^{(n)}]$ – унитарная матрица, столбцы которой – соответствующие этим собственным числам ортонормированные собственные векторы (собственный базис матрицы A в \mathbb{C}^n).

Разложим вектор x по этому базису

$$x = \alpha_1 s^{(1)} + \dots + \alpha_n s^{(n)} \quad \text{или} \quad x = S\alpha, \text{ где } \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T.$$

Отсюда

$$\langle Ax, x \rangle = x^* Ax = (S\alpha)^* A(S\alpha) = \alpha^* (S^* AS) \alpha.$$

Как известно (п.8.1.), $S^* AS = \Lambda$. Итак,

$$\langle Ax, x \rangle = \alpha^* \Lambda \alpha = \langle \Lambda \alpha, \alpha \rangle$$

или, в координатной форме,

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j |\alpha_j|^2. \quad (9.2.1)$$

Выражение (9.2.1) называется *каноническим представлением* квадратичной формы.

При исследовании квадратичной формы, как явствует из (9.2.1), важную роль играют собственные числа матрицы A . Введем в связи с этим несколько полезных терминов.

Если все собственные числа матрицы A положительны (отрицательны), то вследствие (9.2.1) квадратичная форма положительна (отрицательна) на \mathbb{C}^n , за исключением нулевого вектора, на котором она равна нулю. Такую квадратичную форму (как и ее матрицу) называют *положительно определенной* (*отрицательно определенной*).

Если все собственные числа матрицы A неотрицательны (неположительны), то и соответствующая квадратичная форма всюду неотрицательна (неположительна). Такую квадратичную форму (как и ее матрицу) называют *неотрицательно определенной* (*неположительно определенной*).

Примером неотрицательно определенной матрицы является введенная в п.7.3 матрица Грама $G_A = A^* A$:

$$\langle G_A x, x \rangle = \langle A^* Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \quad (\text{скалярный квадрат вектора неотрицателен!}).$$

Если столбцы матрицы A линейно независимы, то, как известно, $\det(G_A) \neq 0$. Поэтому все ее собственные числа отличны от нуля и, следовательно, положительны. Матрица Грама оказывается в этом случае положительно определенной.

Если, наконец, среди собственных чисел матрицы A есть и положительные, и отрицательные, то соответствующая квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, и называется *знакопеременной*.

Докажем теперь одно важное для приложений свойство квадратичной формы

$$\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2. \quad (9.2.2)$$

Из (9.2.1) имеем

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \sum_{k=1}^n \lambda_k |\alpha_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_{\max} |\alpha_k|^2 = \lambda_{\max} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \lambda_{\max} \|\alpha\|^2; \\ \langle Ax, x \rangle &= \sum_{k=1}^n \lambda_k |\alpha_k|^2 \geq \sum_{k=1}^n \lambda_{\min} |\alpha_k|^2 = \lambda_{\min} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \lambda_{\min} \|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Остается только заметить, что умножение на унитарную матрицу не меняет норму вектора. Следовательно, $\|x\| = \|S\alpha\| = \|\alpha\|$.

Определенная для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{C}^n$ функция

$$x \rightarrow \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2},$$

где A – эрмитова $(n \times n)$ -матрица называется отношением Рэля¹ Из неравенства (9.2.2) следует, что отношение Рэля заключено между наименьшим и наибольшим собственными числами матрицы A .

9.3. Геометрическая интерпретация квадратичных форм

В этом пункте рассматриваются квадратичные формы с вещественной симметричной матрицей, заданные на \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$.

Замечание. Легко видеть, что собственные векторы вещественной симметричной матрицы вещественны. Поэтому координаты вектора из \mathbb{R}^n в собственном базисе такой матрицы тоже вещественны.

В дальнейшем мы считаем, что матрица A ненулевая ("исследование" случая $A = \Theta$ тривиально – квадратичная форма тождественно равна нулю).

1. Квадратичная форма на $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$:

$A = [a]$ – матрица 1-го порядка, $y = \langle Ax, x \rangle = ax^2$.

График этой квадратичной форма – парабола (рис.9.3)

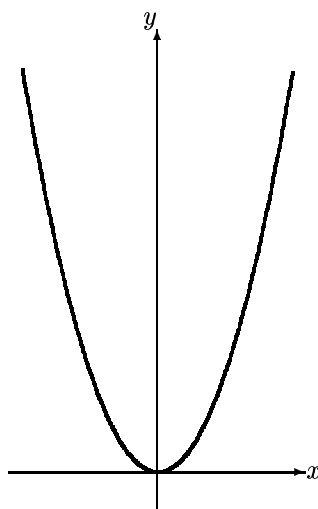


Рис.9.3

2. Квадратичная форма на \mathbb{R}^2 :

Условимся сразу записывать квадратичную форму в ортонормированном собственном базисе ее матрицы.

Тогда

$$y = \langle Ax, x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

График этого функционала – поверхность в \mathbb{R}^3 . Для исследования вида этой поверхности рассмотрим сперва линии уровня квадратичной формы.

а) Пусть квадратичная форма *положительно определена* ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$). Тогда, положив $y = c > 0$ (отрицательное значение формы быть не может, а нулю она равняется только в начале координат), получим уравнение линии, во всех точках которой квадратичная форма сохраняет значение c :

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = c \text{ или } \frac{x_1^2}{c/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{c/\lambda_2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{c/\lambda_1}$ и $\sqrt{c/\lambda_2}$ (рис.9.4).

Таким образом, сечение нашей поверхности горизонтальной плоскостью есть эллипс, и полуоси этого эллипса неограниченно растут по мере удаления секущей плоскости от начала координат. Если учесть, что сечения поверхности вертикальными координатными плоскостями представляют собой параболы $y = \lambda_1 x_1^2$ и $y = \lambda_2 x_2^2$, то форма поверхности станет очевидной. Эта поверхность называется *эллиптическим параболоидом* (рис.9.5).

Если квадратичная форма отрицательно определена, то ее график, очевидно, также является эллиптическим параболоидом, но перевернутым "вверх ногами".

¹Джон Вильям СТРЕТТ, барон РЭЛЕЙ (1842-1919) – английский физик и математик, президент Лондонского Королевского общества, Лауреат Нобелевской премии.

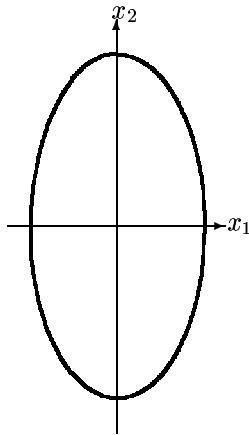


Рис.9.4

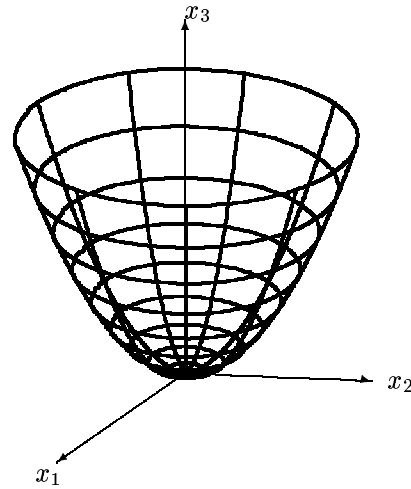


Рис.9.5

При $\lambda_1 = \lambda_2$ в сечениях поверхности горизонтальными плоскостями получаются окружности. Такой параболоид именуется *параболоидом вращения*.

б) Пусть теперь квадратичная форма знакопеременна. Примем для определенности, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Уравнение линии уровня $y = c$ имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = c.$$

При $c > 0$ (сечение горизонтальной плоскостью, расположенной над координатной,) это гипербола (рис.9.6)

$$\frac{x_1^2}{c/\lambda_1} - \frac{x_2^2}{c/|\lambda_2|} = 1$$

с полуосями $\sqrt{c/\lambda_1}$ и $\sqrt{c/|\lambda_2|}$, а при $c < 0$ (сечение горизонтальной плоскостью, расположенной под координатной,) – так называемая сопряженная гипербола. Ее уравнение

$$-\frac{x_1^2}{|c|/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{c/\lambda_2} = 1,$$

а полуоси равны $\sqrt{|c|/\lambda_1}$ и $\sqrt{c/\lambda_2}$ (рис.9.6).

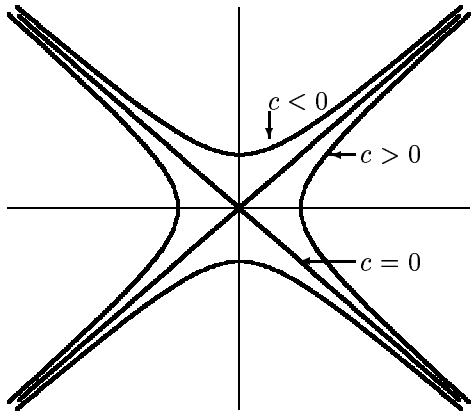
В сечении горизонтальной координатной плоскостью ($c = 0$) получается линия уровня, представляющая собой пару пересекающихся прямых (рис.9.6)

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}} x_1.$$

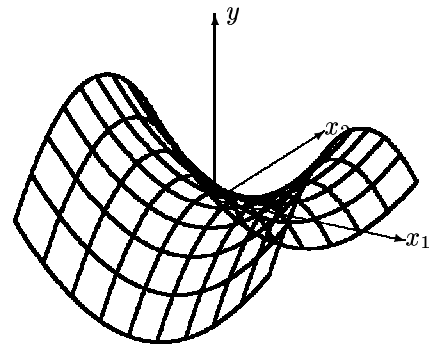
Сечения вертикальными координатными плоскостями – параболы $y = \lambda_1 x_1^2$ и $y = \lambda_2 x_2^2$. График знакопеременной квадратичной формы имеет вид бесконечного "седла" и называется гиперболическим параболоидом (рис.9.7).

в) При наличии у матрицы нулевого собственного числа (пусть, например, $\lambda_1 = 0$) график квадратичной формы $y = \lambda_2 x_2^2$ есть поверхность, во всех сечениях которой вертикальными плоскостями, перпендикулярными оси OX_1 , получается одна и та же парабола. Эта поверхность называется *параболическим цилиндром*. (рис.9.8).

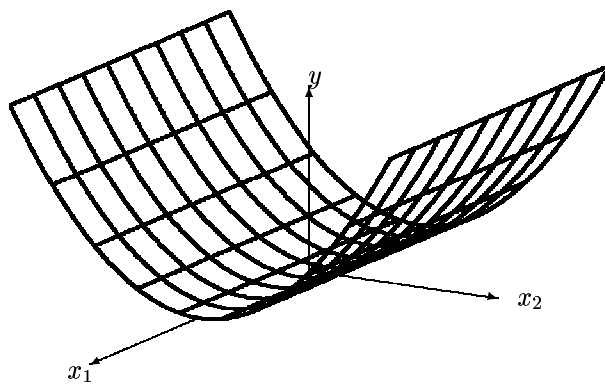
Образующая цилиндра параллельна оси OX_1 . Линии уровня квадратичной формы – это пары параллельных прямых $x_2 = \pm \sqrt{c/\lambda_2}$ (знак c совпадает со знаком λ_2 !).



Puc.9.6



Puc.9.7



Puc.9.8

3. Квадратичная форма на \mathbb{R}^3 :

Записывая эту форму по-прежнему в собственном базисе матрицы A , получим

$$y = \langle Ax, x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2.$$

График этой квадратичной формы, очевидно, не может быть изображен, на что указывалось уже при рассмотрении линейных форм. Рассмотрим поверхности уровня:

а) Если квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то задавая положительное (отрицательное) ее значение, получим уравнение поверхности уровня

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = c \text{ или } \frac{x_1^2}{c/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{c/\lambda_2} + \frac{x_3^2}{c/\lambda_3} = 1.$$

Это уравнение *эллипсоида* с полуосями $\sqrt{c/\lambda_1}$, $\sqrt{c/\lambda_2}$ и $\sqrt{c/\lambda_3}$ (рис.9.9). В сечениях плоскостями, параллельными координатным, получаются эллипсы. При равенстве полуосей поверхность называется *сфера*.

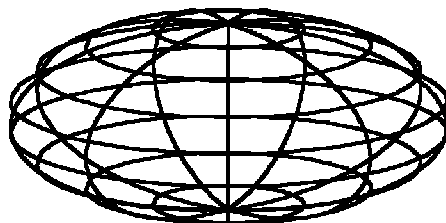


Рис.9.9

б) Если квадратичная форма знакопеременна и среди ее собственных чисел нет нуля, то будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$. Рассмотрим сначала поверхности уровня, на которых эта квадратичная форма положительна. Уравнение такой поверхности имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - |\lambda_3| x_3^2 = c > 0 \text{ или } \frac{x_1^2}{c/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{c/\lambda_2} - \frac{x_3^2}{c/|\lambda_3|} = 1.$$

Это *однополостный гиперболоид* (рис.9.10). Убедитесь самостоятельно, что в сечениях горизонтальными плоскостями получаются эллипсы (в частном случае – при $\lambda_1 = \lambda_2$ – окружности), а в сечениях вертикальными координатными плоскостями – гиперболы.

Уравнение поверхности уровня, на которой квадратичная форма отрицательна имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - |\lambda_3| x_3^2 = c < 0 \text{ или } \frac{x_1^2}{|c|/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{|c|/\lambda_2} - \frac{x_3^2}{c/\lambda_3} = -1.$$

Это *двухполостный гиперболоид*² (рис.9.11). Исследуйте его сечения плоскостями, параллельными координатным.

Уравнение поверхности, на которой квадратичная форма равна нулю

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - |\lambda_3| x_3^2 = 0.$$

Это *конус*, разделяющий семейства однополостных и двухполостных гиперболоидов (рис.9.12).

²По утверждению инженера Гарина, именно эта поверхность была взята им за основу при построении его смертоносного оружия. На самом же деле она для этой цели не пригодна. Оптическим свойством, описанным в романе А.Н. Толстого, обладает параболоид вращения.

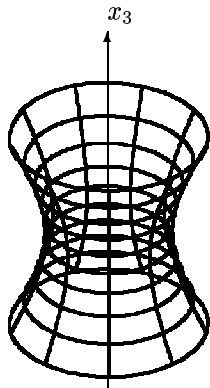


Рис.9.10

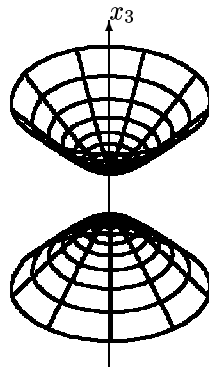


Рис.9.11

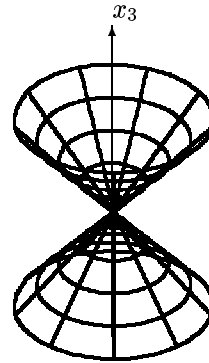


Рис.9.12

в) Пусть теперь одно собственное число (например, λ_3) равно нулю. Тогда остается рассмотреть случаи $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

Если λ_1, λ_2 (а также c) положительны, то уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = c$$

определяет эллиптический (при $\lambda_1 = \lambda_2$ – круговой) цилиндр с образующей, параллельной оси OX_3 (рис.9.13). Такой же цилиндр получается, если λ_1, λ_2 и c отрицательны.

Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, то уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 - |\lambda_2| x_2^2 = c$$

определяет при $c \neq 0$ гиперболический цилиндр с образующей, параллельной оси OX_3 (рис.9.14), а при $c = 0$ – пару пересекающихся плоскостей $\sqrt{\lambda_1} x_1 \pm \sqrt{|\lambda_2|} x_2 = 0$.

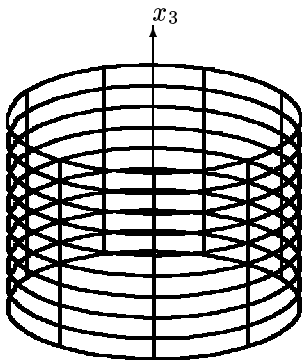


Рис.9.13

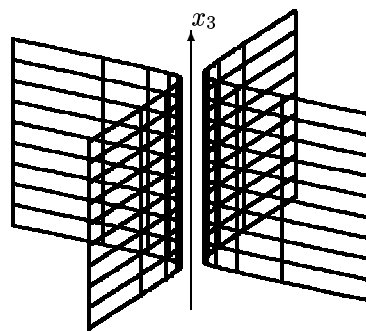


Рис.9.14

Если, наконец, равны нулю два собственных числа из трех, то уравнение поверхности уровня имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 = c \quad (\lambda_1 \cdot c \geq 0)$$

и определяет однопараметрическое семейство плоскостей, перпендикулярных оси Ox_1 .