

Глава 5. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

5.1. Основные понятия. Примеры

Определение. Числовой последовательностью называют числовую функцию, заданную на множестве натуральных чисел ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$). Числовая последовательность каждому натуральному числу – номеру – ставит в соответствие одно комплексное число.

Замечания. 1. Часто областью определения числовой последовательности считают множество натуральных чисел, пополненное нулем (начинают считать не с единицы, а с нуля).

2. По традиции значения функции-последовательности часто обозначают не $f(n)$, а f_n , саму же последовательность – (f_n) или $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$.

3. Удобно представлять себе последовательность в виде бесконечной вправо таблицы, в первой строке которой – номера, а во второй – соответствующие им значения последовательности:

n	1	2	3	...
f_n	f_1	f_2	f_3	...

Примеры. 1. $f(n) \equiv 1$. Множество значений последовательности состоит из одного числа. Такую последовательность принято называть *последовательность-константа*.

Серьезное предупреждение. Не следует путать функцию-константу (в частности, последовательность-константу) и число – единственное значение этой функции.

$$2. f(n) = \exp(i\frac{\pi}{2}n); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Множество значений этой последовательности состоит из четырех чисел: $\{1, i, -1, -i\}$. Последовательность *периодическая* и ее период равен четырем:

$$f(n + 4 \cdot m) = f(n) \quad \text{для всех } n, m = 0, 1, 2, \dots$$

$$3. f_n = n + i \cdot n^2; \quad |f_n| = \sqrt{n^2 + n^4} = n^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Видно, что при увеличении номера модуль значения последовательности неограниченно растет.

$$4. f_n = (1 + \frac{4}{n}) + i(2 + \frac{3}{n^2}).$$

При больших номерах значения этой последовательности мало отличаются от числа $1 + 2i$:

$$|f_n - (1 + 2i)| = |\frac{4}{n} + i\frac{3}{n^2}| = \sqrt{\frac{16}{n^2} + \frac{9}{n^4}} = \frac{1}{n} \sqrt{16 + \frac{9}{n^2}} \leq \frac{5}{n}.$$

Точнее: для *любого* положительного числа ε можно указать номер $n_0 = \text{entier}^1(\frac{5}{\varepsilon}) + 1$, начиная с которого выполняется неравенство $|f_n - (1 + 2i)| < \varepsilon$.

Определение. Будем называть *r-окрестностью* точки $a \in \mathbb{C}$ *внутренность* круга с центром в этой точке и радиусом r , т.е. множество $\{x \in \mathbb{C} \mid |x - a| < r\}$.

Используя это понятие, можно описать поведение последовательности из примера 4 так:

каково бы ни было положительное число ε , найдется номер n_0 , начиная с которого все значения последовательности лежат в ε -окрестности точки $1 + 2i$.

Иначе, вне любой окрестности точки $1 + 2i$ лежат значения последовательности лишь для конечного числа номеров.

Еще одна формулировка: в любой окрестности точки $1 + 2i$ лежат значения последовательности почти для всех номеров.

И, наконец, говорят, что *число* $1 + 2i$ *есть предел последовательности* $(1 + \frac{4}{n}) + i(2 + \frac{3}{n^2})$, и пишут

$$\lim \left((1 + \frac{4}{n}) + i(2 + \frac{3}{n^2}) \right) = 1 + 2i.$$

Определение. Число $A \in \mathbb{C}$ называется *пределом* последовательности (a_n) , если

¹entier – целый (фр.); entier(x) – целая часть вещественного числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .

для любого положительного числа ε найдется такой номер n_0 , что

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon;$$

или

вне любой окрестности точки A лежат значения последовательности (a_n) лишь для конечного числа номеров;

или

внутри любой окрестности точки A лежат значения последовательности (a_n) почти для всех номеров. Если последовательность (a_n) имеет предел A , то пишут

$$\lim a_n = A \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A.$$

Говорят также, что последовательность (a_n) *сходится* к числу A , и пишут

$$a_n \rightarrow A.$$

Нетрудно заметить, что пределом последовательности-константы является значение этой константы (пример 1).

Определение. Если все значения последовательности лежат внутри некоторого круга, то последовательность называется *ограниченной*.

Сравнивая это определение с определением предела, устанавливаем, что всякая сходящаяся (имеющая предел) последовательность ограничена.

Обратное, очевидно, не верно. Так, периодическая последовательность (пример 2) ограничена, но предела не имеет.

Определение. Если вне *любого* круга найдутся значения последовательности, то эту последовательность называют *неограниченной*. Неограниченная последовательность предела не имеет. Такова, в частности, последовательность из примера 3.

5.2. Свойства пределов

Следующие утверждения носят название *теорем о пределах*:

$$1. \quad f_n \equiv a \implies \lim f_n = a.$$

Это свойство было установлено в предыдущем пункте.

$$2. \quad (\lim f_n = a) \bigwedge (\lim g_n = b) \implies \lim(f + g)_n = a + b.$$

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$|(f + g)_n - (a + b)| = |(f_n - a) + (g_n - b)| \leq |f_n - a| + |g_n - b|$$

следует, что при попадании f_n в $\varepsilon/2$ -окрестность точки a , а g_n - в $\varepsilon/2$ -окрестность точки b , $(f + g)_n$ попадает в ε -окрестность точки $a + b$. Но по условию вне $\varepsilon/2$ -окрестности точки a лежат значения последовательности (f_n) лишь для конечного числа номеров, и вне $\varepsilon/2$ -окрестности точки b лежат значения последовательности (g_n) также лишь для конечного числа номеров. Следовательно, вне ε -окрестности точки $a + b$ лежат значения последовательности $((f + g)_n)$ лишь для конечного числа номеров. В силу произвольности положительного числа ε $\lim(f + g)_n = a + b$.

$$3. \quad (\lim f_n = a) \bigwedge (\lim g_n = b) \implies \lim(f \cdot g)_n = a \cdot b.$$

$$4. \quad (\lim f_n = a) \bigwedge (\lim g_n = b) \bigwedge (b \neq 0) \implies \lim(f/g)_n = a/b.$$

Доказательства утверждений 3 и 4 мы не приводим. Отметим лишь, что концентрация значений последовательности (f_n) около точки (числа) a , а значений последовательности (g_n) около точки (числа) b приводит,

очевидно, к концентрации значений последовательности $((f \cdot g)_n)$ около точки (числа) $a \cdot b$, а значений последовательности $((f/g)_n)$ – около точки (числа) a/b . В последнем случае особо оговорено, что $b \neq 0$

$$5. \quad (\lim f_n = 0) \bigwedge ((g_n) \text{ограничена}) \implies \lim(f \cdot g)_n = 0.$$

Как и в утверждении 3 здесь рассматривается предел произведения двух последовательностей. Но здесь не требуется существование предела второго сомножителя!

Доказательство. Пусть все значения ограниченной последовательности (g_n) лежат в M -окрестности начала координат, т.е. $|g_n| < M$. Тогда

$$|f_n \cdot g_n| < M \cdot |f_n|.$$

Возьмем произвольное положительное число ε . Вне ε/M -окрестности нуля лежат значения (f_n) лишь для конечного числа номеров. Поэтому вне $M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon$ -окрестности нуля лежат значения $((f \cdot g)_n)$ для тех же (конечного числа) номеров.

$$6. \quad \lim f_n = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R}) \iff (\lim \operatorname{Re}(f_n) = a) \bigwedge (\lim \operatorname{Im}(f_n) = b).$$

Доказательство. Обозначим $x_n = \operatorname{Re}(f_n)$, $y_n = \operatorname{Im}(f_n)$.
Если $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$, то согласно утверждениям 1-3,

$$\lim(x_n + iy_n) = \lim x_n + \lim(i \cdot y_n) = a + \lim(i) \cdot \lim y_n = a + ib.$$

Наоборот, пусть $\lim f_n = a + ib$. Из очевидного равенства

$$|f_n - (a + ib)| = |\overline{f_n} - \overline{(a + ib)}| = |\overline{f_n} - (a - ib)|$$

следует, что $\lim \overline{f_n} = a - ib$. Теперь утверждения 1-3 дают:

$$\lim x_n = \lim \left(\frac{1}{2}(f_n + \overline{f_n}) \right) = \lim \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (\lim f_n + \lim \overline{f_n}) = \frac{1}{2} \cdot (a + ib + a - ib) = a.$$

$$\lim y_n = \lim \frac{1}{2i}(f_n - \overline{f_n}) = \frac{1}{2i} \cdot (a + ib - a + ib) = b.$$

Утверждения 1 – 6 верны для любых комплексных последовательностей. При изучении *вещественных* последовательностей важную роль играет следующая

Теорема. Если последовательность вещественных чисел возрастает и ограничена, то она имеет предел.

Доказательство. Множество X значений последовательности (x_n) ограничено сверху и, следовательно (см. п. 2.1), имеет верхнюю грань. Обозначим $x = \sup(X)$ и покажем, что $\lim x_n = x$.

Действительно, $x_n \leq x$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (из определения верхней границы множества). Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $x_{n_0} > x - \varepsilon$ (иначе число $x - \varepsilon$ было бы верхней границей, которая меньше верхней грани!). Но последовательность (x_n) возрастает, и неравенство

$$x - \varepsilon < x_n < x < x + \varepsilon$$

выполняется для всех $n \geq n_0$.

Аналогично, если вещественная последовательность ограничена и убывает, то $\lim x_n = \inf(X)$.