

2. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. Множество всех вещественных чисел (\mathbb{R})

Мы не будем пытаться определить понятие "вещественное число", считая, что некоторое представление читатель о нем уже имеет (в частности, знает, что каждое вещественное число изображается точкой на числовой оси). Как правило, мы будем иметь дело со следующими частями \mathbb{R} :

- 1) $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ – замкнутый промежуток, или сегмент;
- 2) $]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$ – открытый промежуток, или интервал;
- 3) полуинтервал $]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$;
- 4) полуинтервал $[a, b[= \{x \mid a \leq x < b\}$;

Здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Серьезное предупреждение. Читателю, несомненно, приходилось и придется в дальнейшем пользоваться компьютером для вычислений. Мы считаем необходимым подчеркнуть, что любой компьютер работает не с множеством всех вещественных чисел (\mathbb{R}), а лишь с *конечной* (и не очень большой) его частью – так называемыми *машинными* числами. Учет этого факта поможет избежать многих досадных ошибок при решении вычислительных задач. Поэтому мы настоятельно рекомендуем ознакомиться с машинными числами хотя бы по Приложению к этой книге.

Введем теперь *расширенное множество вещественных чисел* ($\overline{\mathbb{R}}$), которое получается добавлением к \mathbb{R} двух элементов:

$$-\infty \text{ (минус бесконечность) и } +\infty \text{ (плюс бесконечность)},$$

т.е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Эти элементы не являются, конечно, вещественными числами.

Нижеследующие правила обращения с элементами множества $\overline{\mathbb{R}}$ вводятся по определению (под x здесь понимается произвольное вещественное число):

$$\begin{aligned} -\infty < x < +\infty; \quad x + (-\infty) &= -\infty; \quad x + (+\infty) = +\infty; \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty; \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty; \\ (+\infty) + (-\infty) &\text{ не определено!} \\ x > 0 \implies x \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty; \quad x < 0 \implies x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty; \\ 0 \cdot (\pm\infty) &\text{ не определено!} \\ (-\infty) \cdot (-\infty) &= (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty; \\ (-\infty) \cdot (+\infty) &= -\infty; \quad \frac{x}{\pm\infty} = 0. \end{aligned}$$

Делить на нуль даже в $\overline{\mathbb{R}}$ нельзя!

Определение. Пусть X – непустая часть \mathbb{R} . Если существует такое вещественное число M , что для всякого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq M$ (в X нет числа, большего, чем M), то говорят, что множество X *ограничено сверху*, а число M называют *верхней границей* множества X . (Обратите внимание на то, что неравенство *нестрогое*!)

Если числа с описанным выше свойством не существует, т.е. какое бы мы ни взяли вещественное число, во множестве X найдется большее число, то говорят, что множество X *не ограничено сверху*.

Геометрически X представляется множеством точек вещественной оси. Если M – верхняя граница множества X , то *правее* точки M *нет* точек из X .

Ясно, что любое число, большее верхней границы множества, также будет верхней границей этого множества. Учитывая правило $x \in \mathbb{R} \implies x < +\infty$, установленное в $\overline{\mathbb{R}}$, следует считать $+\infty$ верхней границей любой непустой части \mathbb{R} . Если же X не ограничено сверху, то у него нет верхних границ из \mathbb{R} и $+\infty$ будет его единственной верхней границей.

Аналогично определяется ограниченность снизу непустой части \mathbb{R} и ее нижняя граница.

Отметим, что не во всяком непустом множестве вещественных чисел есть наибольшее число. Покажем, например, что в интервале нет наибольшего числа.

Действительно, возьмем любое число x из интервала $]a, b[$. Тогда

$$x \in]a, b[\implies \left(\frac{x+b}{2} \in]a, b[\right) \wedge \left(\frac{x+b}{2} > x \right).$$

В то же время *можно показать, что*¹ среди верхних границ любого непустого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ есть наименьшая. Ее называют *точной верхней границей* или *верхней гранью* множества X и обозначают символом $\sup(X)$ (от латинского supremum). При этом если X ограничено сверху, то $\sup(X) \in \mathbb{R}$, иначе $\sup(X) = +\infty$.

Аналогично вводится понятие *точной нижней границы* (*нижней грани*) множества – наибольшей из его нижних границ. Нижнюю грань множества X обозначают символом $\inf(X)$ (от латинского infimum).

Отметим, что когда в множестве есть наибольшее (наименьшее) число, оно, очевидно, и является верхней (нижней) гранью этого множества.

2.2. Множество всех комплексных чисел (\mathbb{C})

Известно, что каждая точка M , лежащая в плоскости, взаимно однозначно определяется своими декартовыми координатами: упорядоченной парой вещественных чисел (x, y) (рис. 2.1)²:

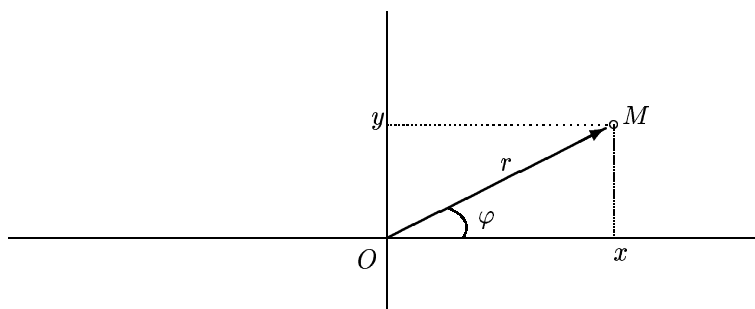


Рис. 2.1

Условимся, что в этом пункте буква z (как с индексом, так и без) будет обозначать упорядоченную пару вещественных чисел. Известно также, что каждой точке M взаимно однозначно соответствует направленный отрезок \overrightarrow{OM} .

Определим сложение упорядоченных пар вещественных чисел правилом

$$z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2) \implies z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

При этом соответствующие направленные отрезки $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ складываются известным способом – по правилу параллелограмма (рис. 2.2).

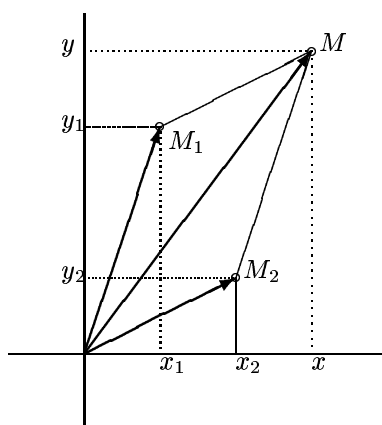


Рис. 2.2

Очевидно, что при любых z_1, z_2, z_3

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

¹Выражение "можно показать, что" здесь и далее означает: "Мы не можем или не хотим приводить доказательство. Интересующимся предоставляется возможность ознакомиться с ним по более полным курсам".

²Таким образом, плоскость можно рассматривать как геометрическую интерпретацию декартова произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

(сложение упорядоченных пар вещественных чисел коммутативно и ассоциативно).

Умножение упорядоченных пар вещественных чисел определяется правилом

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = ((x_1 x_2 - y_1 y_2), (x_1 y_2 + x_2 y_1)).$$

Убедитесь, что умножение коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения.

Избавимся от необходимости повторять длинное словосочетание "упорядоченная пара вещественных чисел" и заменим его более коротким "комплексное число".

Определение. Декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с определенными в нем выше двумя операциями – сложением и умножением – будем называть *множеством всех комплексных чисел*, а его элементы – упорядоченные пары вещественных чисел – *комплексными числами*. Множество всех комплексных чисел обозначается символом \mathbb{C} .

Фортран и все среды конечного пользователя, предназначенные для решения вычислительных задач, "знают" комплексные числа и "умеют" работать с ними. Поэтому не следует стараться всегда "приводить выражения к вещественной форме".

Имеет место очевидное взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и комплексными числами. Рассмотрим часть \mathbb{C} , соответствующую точкам, лежащим на оси абсцисс. Все эти комплексные числа имеют нулевую вторую компоненту пары. Покажем, что это множество *замкнуто относительно операций сложения и умножения*, т.е. что сумма и произведение чисел из этого множества находятся в нем же:

$$z_1 = (x_1, 0) \bigwedge z_2 = (x_2, 0) \implies z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, 0) \bigwedge z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2, 0).$$

Видно, что фактически мы оперируем лишь с первыми компонентами пар, соответственно складывая или перемножая их как вещественные числа. Это дает основание отождествить комплексное число $(x, 0) \in \mathbb{C}$ с вещественным числом $x \in \mathbb{R}$, и в дальнейшем не различать их.

При таком соглашении каждое комплексное число $z = (x, y)$ может быть представлено в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1). \quad (2.2.1)$$

Если ввести обозначение $i = (0, 1)$, то (2.2.1) переписывается более компактно:

$$z = x + y \cdot i \quad \text{или} \quad z = x + i \cdot y. \quad (2.2.2)$$

Выражение (2.2.2) называют *алгебраической формой* комплексного числа. Точку, обозначающую умножение часто опускают и пишут $z = x + iy = x + yi$. Говорят, что x – вещественная часть комплексного числа $z = x + iy$, а y его – мнимая часть (не стоит доискиваться исторических причин появления таких названий – просто запомнить их и пользоваться ими).

Пишут

$$x = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + iy), \quad y = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x + iy).$$

(Re и Im – сокращения от *Real* – вещественный и *Imaginare* – мнимый).

Нетрудно заметить, что из "таблицы умножения" комплексных чисел существенно только одно правило

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

(мы надеемся, что читатель убежден в отсутствии *вещественного* числа, квадрат которого отрицателен, и надеемся, что эта уверенность у него сохранится. Во избежание недоразумений следовало бы писать $(0, 1)^2 = (-1, 0)$. Однако удобнее писать $i^2 = -1$, и так пишут все).

Сформулируем правила выполнения арифметических операций с комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Видно, что комплексные числа складываются и перемножаются как двучлены. Нужно только помнить, что при появлении произведения $i \cdot i$ его следует сразу же заменить числом (-1) . Заметим еще, что умножение комплексного числа на вещественное выполняется покомпонентно:

$$\alpha \cdot (x + iy) = (\alpha x) + i(\alpha y).$$

Вычитание комплексных чисел определяется естественным образом:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Определение. Числа $x + iy$ и $x - iy$ называются *сопряженными* комплексными числами. Пишут

$$x - iy = \overline{x + iy} \quad \text{или} \quad x + iy = \overline{x - iy}.$$

Точки плоскости, соответствующие паре сопряженных комплексных чисел, симметричны относительно оси абсцисс.

Комплексные числа с нулевой мнимой частью (по нашему соглашению – вещественные числа), и только они, совпадают с сопряженными им, т.е.

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Имеют место очевидные равенства:

$$\frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z}) = \operatorname{Re}(z); \quad \frac{1}{2} \cdot (z - \bar{z}) = i \cdot \operatorname{Im}(z).$$

Заметим, что

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2,$$

т.е. произведение пары комплексно сопряженных чисел равно квадрату расстояния от точек плоскости, соответствующих этим числам, до начала координат.

Определение. *Модуль* комплексного числа – это расстояние от начала координат до точки плоскости, соответствующей этому числу. Пишут

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Имеет место очевидное неравенство

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(длина диагонали параллелограмма не больше суммы длин его смежных сторон).

2.3. Полярная система координат на плоскости и экспоненциальная форма записи комплексного числа

Положение точки M на плоскости можно задать с помощью упорядоченной пары чисел: r – расстояние от начала координат до этой точки и φ – угол (в радианах), отсчитываемый против часовой стрелки от оси абсцисс до направленного отрезка \overrightarrow{OM} (рис. 2.1).

Эту упорядоченную пару чисел называют *полярными координатами* точки M ; r называют *полярным радиусом*, а φ – *полярным углом* точки. Переход от полярных координат точки к ее декартовым координатам осуществляется по формулам

$$x = r \cdot \cos(\varphi); \quad y = r \cdot \sin(\varphi).$$

Полярный радиус точки определяется по ее декартовым координатам также однозначно:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

А вот полярный угол определен лишь с точностью до целого числа периодов синуса (косинуса). Действительно, на рис.2.1. вместо φ с одинаковым основанием можно написать

$$\varphi \pm 2\pi, \quad \varphi \pm 4\pi, \dots, \varphi \pm 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Иногда, чтобы устранить эту неоднозначность, уславливаются считать, что

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{или} \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Тогда у каждой точки плоскости (кроме начала координат) полярный угол определяется однозначно³. Для точки $(0, 0)$ (начало координат) полярный угол *не определен*.

³Иногда встречающаяся формула $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ неверна, так как определяемый по ней угол всегда будет лежать в промежутке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. В Фортране и в средах конечного пользователя имеются функции, возвращающие правильное значение полярного угла.

Мы в этом курсе не вводим ограничений на величину полярного угла.

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме. Выражая декартовы координаты точки через полярные, получим

$$z = x + i \cdot y = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi) = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)).$$

Выражение $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ называют *тригонометрической формой* записи комплексного числа. Полярный угол точки плоскости, соответствующей комплексному числу, называют также *аргументом* этого числа. Пишут $\arg(z) = \varphi$.

Учитывая, что конструкция $\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ будет постоянно встречаться, введем для нее специальное обозначение

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

и установим некоторые свойства функции $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (иногда вместо $\exp(i\varphi)$ пишут $e^{i\varphi}$, но мы предпочитаем этого не делать)

1. $\exp(0) = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1$.
2. $|\exp(i\varphi)| = (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))^{1/2} \equiv 1$.
3. $\exp(i\varphi) \cdot \exp(i\psi) = (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi)) =$
 $= (\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)) + i \cdot (\cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi)) =$
 $= \cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi) = \exp(i(\varphi + \psi)).$
4. Полагая в (3) $\psi = \varphi$, получаем
 $(\exp(i\varphi))^2 = \exp(2i\varphi)$
 и, аналогично, для любого $n \in \mathbb{N}$ $(\exp(i\varphi))^n = \exp(in\varphi)$
5. Полагая в (3) $\psi = -\varphi$, получаем
 $\exp(i\varphi) \cdot \exp(-i\varphi) = \exp(0) = 1$.
 Отсюда $\exp(i\varphi) \neq 0$ и $(\exp(i\varphi))^{-1} = \exp(-i\varphi)$.

Используя введенное обозначение, будем записывать комплексное число также в виде

$$z = |z| \cdot \exp(i \cdot \arg(z))$$

и называть это выражение *экспоненциальной формой* записи комплексного числа.

При этом, если $z_1 = |z_1| \cdot \exp(i\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2| \cdot \exp(i\varphi_2)$, то

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Введем операцию деления комплексных чисел. Назовем частным от деления z_1 на z_2 такое комплексное число z , что $z \cdot z_2 = z_1$.

Очевидно, что при $z_2 = 0$, $z \cdot z_2 = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Поэтому, как и во множестве вещественных чисел, деление на нуль не определено.

Очевидно также, что если $z_2 \neq 0$ и $z_1 = 0$, то $z = \frac{z_1}{z_2} = 0$.

Пусть теперь $z_2 \neq 0$. Запишем делимое, делитель и частное в экспоненциальной форме:

$$z_1 = |z_1| \cdot \exp(i\varphi_1), \quad z_2 = |z_2| \cdot \exp(i\varphi_2), \quad z = |z| \cdot \exp(i\varphi).$$

Тогда по определению

$$|z| \cdot |z_2| \cdot \exp(i(\varphi + \varphi_2)) = |z_1| \cdot \exp(i\varphi_1).$$

Отсюда

$$|z| \cdot |z_2| = |z_1|, \quad \varphi + \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и частное определяется единственным образом:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2 + 2k\pi)) = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Если делимое и делитель заданы в алгебраической форме, то частное находят так: умножая числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на \bar{z}_2 , имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример. $\frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i) \cdot (2+3i)}{2^2 + 3^2} = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$

2.4. Уравнение $z^n = c$. Квадратное уравнение

Пусть $c = |c| \cdot \exp(i\varphi) \neq 0$ – заданное комплексное число. Найдём все корни уравнения $z^n = c$. Будем искать их в экспоненциальной форме.

Пусть $z = |z| \cdot \exp(i\psi)$. Тогда

$$|z|^n \cdot \exp(in\psi) = |c| \cdot \exp(i\varphi).$$

Отсюда

$$|z|^n = |c|; \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому все корни уравнения имеют один и тот же модуль $|z| = |c|^{1/n}$, а их аргументы вычисляются по формуле $\psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Легко видеть, что при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ получаются n различных корней уравнения. Точки, изображающие эти корни, лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $|c|^{1/n}$ и делят эту окружность на n равных частей.

В то же время при $m \in \mathbb{Z}$ $\psi_{k+mn} = \psi_k + 2m\pi$. Поэтому всем значениям k , дающим одинаковый остаток при делении на n , соответствует один и тот же корень. Следовательно, других корней нет.

Замечание. При $c = 0$ корни уравнения сливаются: $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Мы будем считать, что уравнение $z^n = 0$ также имеет ровно n корней (каждый из них равен нулю).

Решим теперь квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0; \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

Прделаем тождественное преобразование

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + 2z \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) = \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Обозначив

$$W = z + \frac{b}{2a}, \quad G = \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a},$$

получим уравнение $W^2 = G$, имеющее, как было показано выше, два корня (совпадающие при $G = 0$).

Мы показали, что всякое квадратное уравнение имеет ровно два комплексных корня. Рассмотрим особо случай, когда числа a, b, c – вещественные. Возможны три варианта:

$$1. \quad G = \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a} > 0. \quad \text{Тогда} \quad |G| = G, \quad \arg(G) = 0,$$

$$W_1 = |G|^{1/2} \exp(i0) = |G|^{1/2}, \quad W_2 = |G|^{1/2} \exp(i\frac{2\pi}{2}) = -|G|^{1/2} \quad \text{или}$$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(уравнение имеет два *различных вещественных* корня).

$$2. \quad G = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0. \quad \text{Тогда} \quad W_1 = W_2 = 0, \quad z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

(уравнение имеет два *совпадающих вещественных* корня).

Варианты 1 и 2 были изучены в школе.

$$3. \quad G = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0. \quad \text{Тогда} \quad |G| = -G, \quad \arg(G) = \pi,$$

$$W_1 = |G|^{1/2} \exp(i\frac{\pi}{2}) = i|G|^{1/2}, \quad W_2 = |G|^{1/2} \exp(i\frac{3\pi}{2}) = -i|G|^{1/2} \quad \text{или}$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

(уравнение имеет два *различных комплексно сопряженных* корня).

Замечание. Имеют место так называемые формулы Виета⁴ (проверяются вычислением):

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}.$$

⁴Франсуа ВИЕТ (1540-1603) – французский математик.