

Глава 16. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

16.1. Несобственный интеграл от неограниченной функции

Начнем с примера. Рассмотрим функцию $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{при } x \neq 0; \\ A \in \mathbb{R} & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Она *не ограничена* на сегменте $[0, 1]$ ($\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$). Поэтому не существуют суммы Дарбу, и не существует интеграл Римана от f по $[0, 1]$.

Возьмем на *интервале* $]0, 1[$ точку α и рассмотрим функцию f_α – сужение f на $[\alpha, 1]$. Она непрерывна, и существует интеграл

$$\int_{\alpha}^1 f_{\alpha} = \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 = 2 - 2\sqrt{\alpha},$$

предел которого при $\alpha = 0+$ конечен:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 f_{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2.$$

Этот предел называют *несобственным интегралом* от функции f по $[0, 1]$. Пишут

$$\int_0^1 f = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 f = 2.$$

Замечание. Так как значение функции f в нуле не играет никакой роли, можно считать, что она в нуле не задана (задана на полуинтервале $]0, 1[$) и писать

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2.$$

Приведем простую физическую интерпретацию этого примера. Электрический заряд распределен вдоль стержня $[0, 1]$ с линейной плотностью $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (значение плотности в точке $x = 0$ роли не играет). Эта плотность не ограничена, Однако полный заряд стержня конечен и равен двум единицам заряда.

Попробуем поступить так же с функцией

$$g :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (\ln(1) - \ln(\alpha)) = +\infty.$$

Символу $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ невозможно приписать никакого числового значения. Обычно используют математические эвфемизмы и говорят "несобственный интеграл не существует" или "несобственный интеграл расходится".

Пользуясь той же физической интерпретацией можно сказать, что такая линейная плотность распределения заряда была бы возможна только при бесконечно большом полном заряде стержня.

Определение. Если функция $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ не ограничена в окрестности точки a , но кусочно непрерывна на любом сегменте $[\alpha, b]$ ($a < \alpha < b$), и существует *конечный* предел $\lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_{\alpha}^b f$, то этот предел называют *несобственным интегралом* от f по $[a, b]$ и пишут

$$\int_a^b f = \lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_{\alpha}^b f.$$

Аналогично определяют несобственный интеграл от функции f , заданной на $[a, b[$, не ограниченной в окрестности точки b и кусочно непрерывной на $[a, \beta[$ при любом $\beta \in]a, b[$:

$$\int_a^b f = \lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^{\beta} f.$$

Понятие "несобственный интеграл от неограниченной функции" можно *описать* так: если один из концов сегмента, по которому хотят проинтегрировать функцию, является для этой функции *особой точкой* (в ее окрестности функция не ограничена), то малую окрестность особой точки удаляют и вычисляют интеграл Римана по оставшейся части сегмента (где функция ведет себя прилично). Затем длину удаленной части сегмента устремляют к нулю. Если при этом интеграл Римана имеет *конечный* предел, то этот предел называют *несобственным интегралом* (это уже НЕ интеграл Римана!). Если *конечного* предела нет, то говорят, что "несобственный интеграл не существует" (расходится).

Остается рассмотреть случай, когда особая точка лежит внутри сегмента, по которому ведется интегрирование.

Пусть функция f задана во всех точках сегмента, кроме его *внутренней* точки c , не ограничена в окрестности точки c , но сужение этой функции на $[a, \alpha] \cup [\beta, b]$, ($a < \alpha < c < \beta < b$) кусочно непрерывно. Тогда несобственный интеграл от функции f по сегменту $[a, b]$ определяют как сумму несобственных интегралов по $[a, c]$ и $[c, b]$, т.е.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{\alpha \rightarrow c-} \int_a^{\alpha} f + \lim_{\beta \rightarrow c+} \int_{\beta}^b f$$

(если оба эти предела конечны). Если хотя бы один из них не существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f$ не существует.

Пример. Несобственный интеграл $\int_{-2}^1 \frac{1}{x} dx$ не существует, так как уже было показано, что не существует несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$.

Если особая точка c лежит внутри сегмента $[a, b]$ и несобственный интеграл $\int_a^b f$ не существует, то можно попытаться придать смысл символу $\int_a^b f$, используя еще одно понятие.

Определение. Главным значением (по Коши) несобственного интеграла $\int_a^b f$ называется число

$$V.P.^1 \int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right).$$

Замечание. Обратите внимание на то, что

1) в определении главного значения удаляемый промежуток (с плохим поведением функции) симметричен относительно особой точки,

2) вычисляется предел суммы вместо суммы пределов (известно, что предел суммы существует при существовании пределов слагаемых, но может существовать и при отсутствии последних).

Примеры.

$$1. V.P. \int_{-2}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln(\varepsilon) - \ln(2) + \ln(1) - \ln(\varepsilon)) = -\ln(2).$$

¹Valeur principal (фр.) – главное значение.

$$2. \text{ V.P. } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon=0+} \left(\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx \right) = \lim_{\varepsilon=0+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 - 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty.$$

Показав, что не существует главное значение несобственного интеграла, мы показали также, что не существует и несобственный интеграл (в обычном смысле).

16.2. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ — функция, кусочно непрерывная на любом сегменте $[a, A]$ ($a < A < +\infty$).

Если существует конечный предел

$$\lim_{A=+\infty} \int_a^A f,$$

то его называют несобственным интегралом от функции f по $[a, +\infty[$ и пишут

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{A=+\infty} \int_a^A f.$$

Если конечный предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл не существует (расходится).

Примеры.

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A=+\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A=+\infty} (\arctg(A) - \arctg(0)) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = \lim_{A=+\infty} \int_0^A \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{A=+\infty} (\ln(1+A^2) - \ln(1)) = +\infty$$

(несобственный интеграл расходится).

$$3. \int_0^{+\infty} \cos(x) dx = \lim_{A=+\infty} \int_0^A \cos(x) dx = \lim_{A=+\infty} (\sin(A) - \sin(0)).$$

Предел не существует (несобственный интеграл расходится).

Аналогично определяется несобственный интеграл по $] -\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{B=-\infty} \int_B^b f.$$

Несобственный интеграл по $] -\infty, +\infty[$ определяется как сумма пределов (при условии, что оба предела существуют и конечны)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{B=-\infty} \int_B^c f + \lim_{A=+\infty} \int_c^A f \quad (c - \text{любое вещественное число}).$$

Если хотя бы один из пределов не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Например, несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot dx}{1+x^2}$ расходится, так как уже было показано, что расходится

несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot dx}{1+x^2}$.

В случае несобственного интеграла по $] -\infty, +\infty[$ можно ввести понятие главного значения (по Коши)

$$\text{V.P. } \int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{A=+\infty} \int_{-A}^A f.$$

Так же, как и в случае несобственного интеграла от неограниченной функции, главное значение отличается от несобственного интеграла в обычном смысле тем, что, во-первых, интегрирование ведется по симметричному относительно начала координат промежутку, и, во-вторых, вычисляется не *сумма пределов*, а *предел суммы*, который может существовать и при отсутствии пределов слагаемых.

Пример.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(1+A^2) - \ln(1+A^2)) = 0.$$

Рекомендуем читателю убедиться в том, что символу $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx$ нельзя приписать числовое значение ни одним из рассмотренных способов.

Замечание. Мы ввели два различных типа несобственных интегралов: интегралы от неограниченных функций и интегралы по бесконечному промежутку. В дальнейшем мы будем употреблять термин "интеграл, несобственный на правом конце промежутка $[a, b[$ " как в случае, когда $b = +\infty$, так и в случае, когда $b \in \mathbb{R}$, но подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки b . Аналогично определим и термин "интеграл, несобственный на левом конце промежутка $]a, b]$ ".

16.3. Признаки сходимости несобственных интегралов

Можно показать, что для несобственных интегралов справедливы теоремы, аналогичные теоремам о сходимости числовых рядов.

Теорема 1 (признак сравнения для интегралов от *положительных* функций). Пусть $f \geq g \geq 0$ на $[a, b[$ и интегралы $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ – несобственные на правом конце промежутка. Тогда из сходимости интеграла от "большей" функции $\int_a^b f$ следует сходимость интеграла от "меньшей" функции $\int_a^b g$, причем $\int_a^b g \leq \int_a^b f$, а из расходимости интеграла от "меньшей" функции $\int_a^b g$ следует расходимость интеграла от "большей" функции $\int_a^b f$.

Теорема 2 (предельная форма признака сравнения). Пусть $f \geq 0$, $g \geq 0$ на $[a, b[$ и интегралы $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ – несобственные на правом конце промежутка. Если существует $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{g(x)}{f(x)} = L \in \mathbb{R}$, то

1) при $L \neq 0$ либо оба интеграла сходятся, либо оба расходятся;

2) при $L = 0$ из сходимости $\int_a^b f$ следует сходимость $\int_a^b g$; из расходимости $\int_a^b g$ следует расходимость $\int_a^b f$.

Теорема 3. Пусть f – комплекснозначная функция, заданная на $[a, b[$ и интеграл $\int_a^b f$ – несобственный на правом конце промежутка. Если сходится $\int_a^b |f|$, то сходится и $\int_a^b f$, причем $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ (в этом случае говорят, что интеграл $\int_a^b f$ *абсолютно сходится*).

Эти три теоремы естественным образом переносятся на случай интегралов, несобственных на *левом* конце промежутка.

Пример. Рассмотрим семейство несобственных интегралов с параметром x :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

Докажем, что при $x > 0$ эти несобственные интегралы сходятся.

Отметим, что при $x < 1$ эти интегралы – несобственные на обоих концах промежутка: на правом промежутке бесконечный, а на левом – подынтегральная функция не ограничена в окрестности нуля. Поэтому

рассмотрим отдельно два интеграла:

$$H_1 = \int_0^1 t^{x-1} \exp(-t) dt, \quad H_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

В первом интеграле используем очевидное неравенство

$$0 \leq t^{x-1} \exp(-t) \leq t^{x-1} :$$

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{\alpha=0+} \int_{\alpha}^1 t^{x-1} dt = \lim_{\alpha=0+} \left. \frac{t^x}{x} \right|_{\alpha}^1 = \lim_{\alpha=0+} \frac{1 - \alpha^x}{x} = \frac{1}{x}.$$

По признаку сравнения сходится и интеграл H_1 – интеграл от "меньшей" положительной функции. Для исследования второго интеграла используем свойство экспоненты (см. п.9.1)

$$\lim_{t=+\infty} (t^{x+1} \exp(-t)) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{t=+\infty} \frac{t^{x-1} \exp(-t)}{t^{-2}} = 0.$$

Так как

$$\int_1^{+\infty} t^{-2} dt = \lim_{A=+\infty} \int_1^A t^{-2} dt = \lim_{A=+\infty} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^A = 1,$$

то по признаку сравнения в предельной форме сходится интеграл от "меньшей" функции – H_2 .

Мы показали, что на $]0, +\infty[$ определена функция

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt,$$

именуемая *Гамма-функцией*. Докажем рекуррентное соотношение

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \quad x > 0.}$$

Интегрируя "по частям", получаем

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t) dt = -t^x \exp(-t) \Big|_0^{+\infty} + x \cdot \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt = x \cdot \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt = x \cdot \Gamma(x)$$

(здесь вновь использовано свойство экспоненты $\lim_{t=+\infty} (t^x \exp(-t)) = 0$.)

В частности,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = -\exp(-t) \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Отсюда $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$, $\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ и вообще

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.}$$

Вычислим еще $\Gamma(1/2)$. Подстановка $t = x^2$ дает

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} \exp(-t) dt = \int_0^{+\infty} x^{-1} \exp(-x^2) \cdot 2x dx = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx.$$

Очевидно, что

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \int_{-\infty}^0 \exp(-x^2) dx$$

Поэтому

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx.$$

Этот интеграл называется интегралом Пуассона². Вычислить его можно, например, так: рассмотрим интеграл

$$H(A) = \int_{-A}^A \exp(-x^2) dx.$$

Имеем

$$H^2(A) = \left(\int_{-A}^A \exp(-x^2) dx \right) \cdot \left(\int_{-A}^A \exp(-y^2) dy \right)$$

(буква, обозначающая "переменную интегрирования" несущественна!)

В силу линейности интеграла

$$\int_{-A}^A \left(\exp(-y^2) \cdot \int_{-A}^A \exp(-x^2) dx \right) dy = \int_{-A}^A \left(\int_{-A}^A \exp(-x^2) \cdot \exp(-y^2) dx \right) dy.$$

Преобразуем этот повторный интеграл в двойной

$$H^2(A) = \iint_{\Delta_A} \exp(-x^2) \cdot \exp(-y^2) dx dy = \iint_{\Delta_A} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy,$$

где Δ_A – квадрат $[-A, A] \times [-A, A]$.

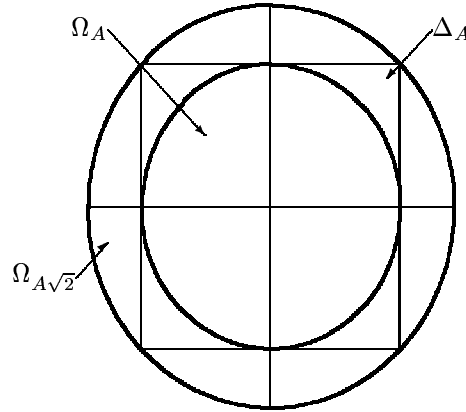


Рис. 16.1

Очевидно, что (см. рис.16.1) $\Omega_A \subset \Delta_A \subset \Omega_{A\sqrt{2}}$, где Ω_A – круг радиуса A , $\Omega_{A\sqrt{2}}$ – круг радиуса $A\sqrt{2}$ (оба с центрами в начале координат). В силу положительности подынтегральной функции имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega_A} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy \leq H^2(A) \leq \iint_{\Omega_{A\sqrt{2}}} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy.$$

Воспользовавшись результатом примера п.14.6, получаем

$$\pi \cdot (1 - \exp(-A^2)) \leq H^2(A) \leq \pi \cdot (1 - \exp(-2A^2)).$$

²Симеон Дени ПУАССОН (1781-1840) – французский механик, физик и математик, член Парижской АН. Его работы сыграли важную роль в становлении теории вероятностей и математической физики.

Переходя к пределу, получим, наконец, что $\lim_{A \rightarrow +\infty} H^2(A) = \pi$, и

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Замечание. Отсюда следует, между прочим, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = 1.$$

16.4. Преобразование Лапласа

Определение. Будем называть *оригиналом* функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, если

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- 2) f кусочно непрерывна;
- 3) f экспоненциально ограничена, т.е. существуют такие положительные числа a и M , что при $t \geq 0$ $|f(t)| \leq M \cdot \exp(at)$.

Примеры. 1. $\delta_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$

Эту функцию называют *функцией Хевисайда*³, (*единичным скачком, единичной ступенью*).

Функция Хевисайда – оригинал, так как она кусочно непрерывна (имеет в нуле единственную точку разрыва первого рода), ограничена и, следовательно, экспоненциально ограничена (можно положить, например, $M = 1$, $a = 0$.)

2. $f(t) = \exp(zt) \cdot \delta_1(t)$, $z \in \mathbb{C}$.

f кусочно непрерывна (имеет в нуле единственную точку разрыва первого рода). Докажем ее экспоненциальную ограниченность. Пусть $x = \operatorname{Re}(z)$. Тогда $|f(t)| = \exp(xt) \leq \exp(|x|t)$, т.е. $M = 1$, $a = |x|$. Итак, f – оригинал.

3. $g(t) = \exp(t^2) \cdot \delta_1(t)$.

Пусть M и a – произвольные положительные числа. Решим (относительно переменной t) неравенство $\exp(t^2) \leq M \cdot \exp(at)$. Сокращая на $\exp(at) > 0$, получим

$$\exp(t^2 - at) \leq M \quad \text{или} \quad t^2 - at \leq \ln(M).$$

Последнее неравенство не может выполняться при *всех положительных* t , так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 - at) = +\infty$. Следовательно, g – не оригинал.

Установим некоторые свойства оригиналов.

1. Очевидно, что линейная комбинация оригиналов есть оригинал.

Например, оригиналами являются функции

$$\cos(\omega t) \cdot \delta_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \exp(i\omega t) \cdot \delta_1(t) + \frac{1}{2} \cdot \exp(-i\omega t) \cdot \delta_1(t) \quad \text{и}$$

$$\sin(\omega t) \cdot \delta_1(t) = \frac{1}{2i} \cdot \exp(i\omega t) \cdot \delta_1(t) - \frac{1}{2i} \cdot \exp(-i\omega t) \cdot \delta_1(t).$$

2. Если f – оригинал, то ее первообразная $F(t) = \int_0^t f$ – тоже оригинал, так как при $t < 0$ $f(t) \equiv 0$ и $\int_0^t f = 0$, а при $t > 0$ из неравенства $|f(t)| \leq M \cdot \exp(at)$ следует, что

$$|F(t)| = \left| \int_0^t f \right| \leq \int_0^t |f| \leq \sup_{[0,t]} |f| \cdot t \leq M \cdot \exp(at) \cdot t \leq M \cdot \exp((a+1)t),$$

т.е. первообразная экспоненциально ограничена и, следовательно, является оригиналом.

³Оливер ХЕВИСАЙД (1850-1925) – английский физик и инженер, член Лондонского Королевского общества. Предсказал открытие так называемого слоя Хевисайда в атмосфере. Один из создателей операционного исчисления.

Пример. Оригиналами являются функции $t \rightarrow t^n \cdot \delta_1(t)$, ($n \in \mathbb{N}$), так как

$$t \cdot \delta_1(t) = \int_0^t \delta_1(t) dt \quad \text{и} \quad t^n \cdot \delta_1(t) = n \cdot \int_0^t t^{n-1} \cdot \delta_1(t) dt.$$

Замечание. Даже если у оригинала есть производная, она не обязана быть оригиналом.

Определение. Пусть $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда несобственный интеграл с вещественным параметром x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_2(x-t) dt$$

определяет на той части \mathbb{R} , где он сходится, функцию, называемую *сверткой* функций f_1 и f_2 , и обозначаемую $f_1 \otimes f_2$.

Отметим следующие свойства свертки:

1. $f_1 \otimes f_2 = f_2 \otimes f_1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (\text{подстановка } x-t=\tau).$$

2. $f_1 \otimes (f_2 + f_3) = f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes f_3$ (следует из линейности интеграла).

3. Докажем, что свертка двух оригиналов – оригинал. Пусть f и g – оригиналы. Тогда

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) \cdot g(x-t) dt + \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt. \end{aligned}$$

В первом интеграле $t < 0$, следовательно, *оригинал* f – тождественный нуль, в третьем интеграле $x-t < 0$, следовательно, *оригинал* g – тождественный нуль. Итак,

$$(f \otimes g)(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt.$$

Отсюда видно, что свертка оригиналов определена на \mathbb{R} .

Далее, если $x < 0$, то $(f \otimes g)(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt = 0$, так как $f(t) \equiv 0$.

На положительной полуоси имеют место оценки

$$|f(t)| \leq M \cdot \exp(at) \leq M \cdot \exp(ct), \quad |g(t)| \leq N \cdot \exp(bt) \leq N \cdot \exp(ct) \quad (c = \max(a, b)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt \right| &\leq \int_0^x |f(t)| \cdot |g(x-t)| dt \leq MN \cdot \int_0^x \exp(ct) \cdot \exp(c \cdot (x-t)) dt = \\ &= MN \cdot \int_0^x \exp(cx) dt = MN \cdot x \cdot \exp(cx) < MN \cdot \exp((c+1)x) \end{aligned}$$

– свертка экспоненциально ограничена и, следовательно, является оригиналом.

Рассмотрев свойства функций-оригиналов, перейдем к определению преобразования Лапласа⁴.

⁴Пьер Симон ЛАПЛАС (1749-1827) – французский математик, физик и астроном, член многих академий и научных обществ, автор фундаментальных работ по теории вероятностей, экспериментальной и математической физике, небесной механике.

Пусть f – оригинал. Рассмотрим семейство несобственных интегралов с *комплексным* параметром $s = \sigma + i\omega$ ($\sigma, \omega \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cdot \exp(st) dt.$$

Оценим подынтегральную функцию. Пусть $|f(t)| \leq M \cdot \exp(at)$. Тогда $|\exp(st)| = \exp(\sigma t)$ и

$$|f(t) \cdot \exp(st)| \leq M \cdot \exp(-(\sigma - a)t). \quad (16.4.1)$$

При $\sigma > a$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp(-(\sigma - a)t) dt &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \exp(-(\sigma - a)t) dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-(\sigma - a)t)}{\sigma - a} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 - \exp(-(\sigma - a)A)}{\sigma - a} = \frac{1}{\sigma - a} \end{aligned}$$

– несобственный интеграл сходится. Из этого факта и неравенства (16.4.1) следует (по признаку сравнения) сходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} |f(t) \cdot \exp(st)| dt$, т.е. абсолютная сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cdot \exp(st) dt.$$

Мы показали, что на части комплексной плоскости, лежащей правее прямой $\operatorname{Re}(s) > a$, определена функция

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-st) dt.$$

Эту функцию называют *изображением* оригинала f . Мы будем записывать соответствие между оригиналом и его изображением так:

$$\tilde{f} = \mathcal{L}(f).$$

Оператор \mathcal{L} , который каждому оригиналу (функции) сопоставляет его изображение (функцию), называют *преобразованием Лапласа*.

Терминологическое замечание. Мы условились считать слова *отображение*, *функция*, *оператор* синонимами. Теперь к этому списку добавляется еще один синоним – *преобразование*.

Подумайте, как будет звучать фраза, если из всех синонимов оставить только один (например, "функция"): "функция сопоставляет каждой функции-оригиналу функцию-изображение". Наличие синонимов делает речь более понятной.

Пример. Найдем изображение функции Хевисайда.

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1(s) &= \int_0^{+\infty} 1 \cdot \exp(-st) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \exp(-st) dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-(\sigma + i\omega)t)}{-s} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 - \exp(-\sigma A) \cdot \exp(-i\omega A)}{s} = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Итак, $\mathcal{L}(\delta_1) = \frac{1}{s}$, ($\operatorname{Re}(s) > 0$).

Докажем некоторые свойства преобразования Лапласа.

1) Из линейности интеграла следует линейность преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \cdot \mathcal{L}(f_1) + \alpha_2 \cdot \mathcal{L}(f_2)$$

для любых оригиналов f_1 и f_2 и любых комплексных чисел α_1 и α_2 .

2) Теорема смещения. Если $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{L}(f) = \tilde{f}$, то

$$\mathcal{L}(f(t) \cdot \exp(\alpha t)) = \tilde{f}(s - \alpha).$$

Доказательство.

$$\int_0^{+\infty} (f(t) \exp(\alpha t)) \cdot \exp(-st) dt = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-(s - \alpha)t) dt = \tilde{f}(s - \alpha).$$

3) Теорема запаздывания. Если $\mathcal{L}(f(t) \cdot \delta_1(t)) = \tilde{f}(s)$ и $\tau > 0$, то

$$\mathcal{L}(f(t - \tau) \cdot \delta_1(t - \tau)) = \exp(-s\tau) \cdot \tilde{f}(s).$$

Доказательство. Подстановка $x = t - \tau$ дает

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (f(t - \tau) \delta_1(t - \tau)) \cdot \exp(-st) dt &= \int_{-\tau}^{+\infty} (f(x) \delta_1(x)) \cdot \exp(-s(\tau + x)) dx = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \exp(-s\tau) \cdot \exp(-sx) dx = \\ &= \exp(-s\tau) \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \exp(-sx) dx = \exp(-s\tau) \cdot \tilde{f}(s). \end{aligned}$$

Название "теорема запаздывания" объясняется тем, что график функции $f_\tau(t) = f(t - \tau) \cdot \delta_1(t - \tau)$ получается сдвигом графика функции $f(t) \cdot \delta_1(t)$ вправо на величину τ ("новая функция начинает работать на τ единиц времени позже, чем старая").

4) Изображение первообразной. Если f – оригинал, то

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f\right) = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}(f).$$

Доказательство. Пусть $g(t) = \int_0^t f$. Тогда (по свойству 2 оригиналов) g – тоже оригинал. Кроме того, $g(0) = 0$. Интегрируя "по частям", имеем

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-st) dt = g(t) \cdot \exp(-st) \Big|_0^{+\infty} + s \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(-st) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} (g(t) \cdot \exp(-st)) + s \cdot \tilde{g}(s).$$

Из оценки $|g(t)| \leq M \cdot \exp(at)$ следует, что при $\sigma = \operatorname{Re}(s) > a$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} (g(t) \cdot \exp(-st)) = 0$. Поэтому $\tilde{f}(s) = s \cdot \tilde{g}(s)$, и утверждение доказано.

5) Изображение производной. Пусть функция f имеет на \mathbb{R} непрерывную производную, причем $f \cdot \delta_1$ и $f' \cdot \delta_1$ – оригиналы. Тогда

$$\mathcal{L}(f' \cdot \delta_1) = s \cdot \mathcal{L}(f \cdot \delta_1) - f(0).$$

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^t (f' \cdot \delta_1) = (f(t) - f(0)) \cdot \delta_1(t) = (f \cdot \delta_1)(t) - f(0) \cdot \delta_1(t).$$

По теореме об изображении первообразной

$$\mathcal{L}(f \cdot \delta_1 - f(0) \cdot \delta_1) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f' \cdot \delta_1).$$

Учитывая, что $\mathcal{L}(\delta_1) = \frac{1}{s}$, получаем

$$\mathcal{L}(f' \cdot \delta_1) = s \cdot \mathcal{L}(f \cdot \delta_1) - f(0) \cdot s \cdot \mathcal{L}(\delta_1) = s \cdot \mathcal{L}(f \cdot \delta_1) - f(0).$$

Следствие. Если $f^{(n)} \cdot \delta_1$ – оригинал, то

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)}\delta_1) &= s \cdot \mathcal{L}(f^{(n-1)} \cdot \delta_1) - f^{(n-1)}(0) = s \cdot \left(s \cdot \mathcal{L}(f^{(n-2)} \cdot \delta_1) - f^{(n-2)}(0) \right) - f^{(n-1)}(0) = \dots \\ &\dots = s^n \cdot \mathcal{L}(f \cdot \delta_1) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

Примеры. 1. Мы показали, что $\mathcal{L}(\delta_1) = \frac{1}{s}$. Отсюда по теореме сдвига получаем

$$\mathcal{L}(\exp(\alpha t)\delta_1(t)) = \frac{1}{s - \alpha}$$

2. Используя линейность преобразования Лапласа, получим далее

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(\omega t)\delta_1(t)) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\exp(i\omega t)\delta_1(t) + \exp(-i\omega t)\delta_1(t))\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)\delta_1(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2i}(\exp(i\omega t)\delta_1(t) - \exp(-i\omega t)\delta_1(t))\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

3. По теореме об изображении первообразной

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \cdot \delta_1(t)) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(\delta_1(t)) = \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2} \cdot \delta_1(t)\right) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(t \cdot \delta_1(t)) = \frac{1}{s^3} \\ &\dots \\ \mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!} \cdot \delta_1(t)\right) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \delta_1(t)\right) = \frac{1}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

4. Применяя к последнему равенству теорему сдвига, получим очень важную для приложений формулу:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!} \cdot \exp(\alpha t) \cdot \delta_1(t)\right) &= \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}. \\ \text{при } n = 0, 1, 2, \dots \text{ и любом } \alpha \in \mathbb{C}\end{aligned}}$$

6) Изображение свертки. Если f_1 и f_2 — оригиналы, то

$$\mathcal{L}(f_1 \otimes f_2) = \mathcal{L}(f_1) \cdot \mathcal{L}(f_2).$$

Доказательство. По определению свертки *оригиналов*

$$g(t) = (f_1 \otimes f_2)(t) = \int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\tilde{g}(s) &= \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(-st) dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx \right) \cdot \exp(-st) dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \left(\int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x) \cdot \exp(-st) dx \right) dt.\end{aligned}$$

Преобразуем повторный интеграл в двойной

$$\tilde{g}(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \iint_{\Delta} f_1(x) \cdot f_2(t-x) \cdot \exp(-st) dx dt,$$

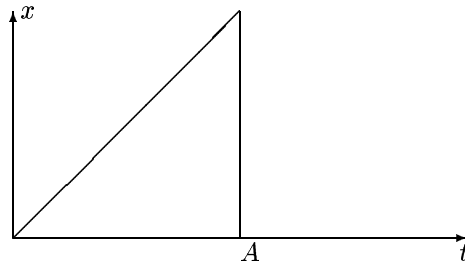


Рис.16.2

где Δ – треугольник ($0 \leq x \leq t \leq A$) (рис.16.2). Полученный двойной интеграл снова преобразуем в повторный, но с другим порядком интегрирования

$$\tilde{g}(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \left(\int_x^A f_1(x) \cdot f_2(t-x) \cdot \exp(-st) \, dx \right) dt.$$

Во внутреннем интеграле сделаем подстановку $t = x + y$ (x здесь фиксирован!)

$$\tilde{g}(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \left(\int_0^{A-x} f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot \exp(-s(x+y)) \, dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot \exp(-s(x+y)) \, dy \right) dx.$$

Наконец, в силу линейности интеграла

$$\begin{aligned} \tilde{g}(s) &= \int_0^{+\infty} \left(f_1(x) \cdot \exp(-sx) \int_0^{+\infty} f_2(y) \cdot \exp(-sy) \, dy \right) dx = \\ &= \left(\int_0^{+\infty} f_1(x) \cdot \exp(-sx) \, dx \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} f_2(y) \cdot \exp(-sy) \, dy \right) = \tilde{f}_1(s) \cdot \tilde{f}_2(s). \end{aligned}$$