

Глава 10. ЛОКАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

10.1. Теорема Ролля

Рассмотрим непрерывную функцию f , принимающую на концах сегмента $[a, b]$ одинаковые значения. Четыре графика таких функций изображены на рис.10.1.

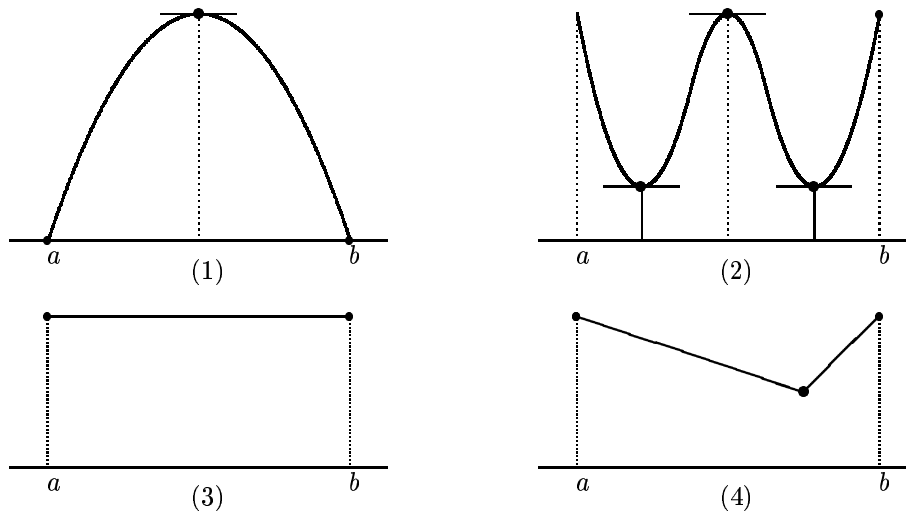


Рис.10.1

Видно, что в случае (1) на графике есть *одна* точка, в которой касательная горизонтальна. В случае (2) таких точек уже *три*. В случае (3) касательная горизонтальна в *каждой внутренней* точке графика. А вот в случае (4) на графике *нет* точек с горизонтальной касательной. Этот случай отличается от предыдущих тем, что касательную к графику можно провести не во всякой его точке (в отмеченной точке функция не имеет производной!).

Можно показать, что справедлива

Теорема Ролля¹. Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

1) непрерывна,

2) имеет производную в каждой точке интервала $]a, b[$,

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда на $]a, b[$ найдется *хотя бы одна* точка, в которой производная функции f равна нулю.

10.2. Формула Тейлора

Пусть f – аналитическая в r -окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ функция:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n + \dots \quad (|x - a| < r).$$

При практических вычислениях работают не с рядом, а с его частной суммой, обрывая суммирование на некотором слагаемом и оценивая возникающую при этом погрешность.

Рассмотрим один из наиболее употребительных способов оценки погрешности, возникающей при замене *вещественной* функции частной суммой ее ряда Тейлора.

Пусть сперва частная "сумма" состоит из одного слагаемого:

$$f(x) \rightsquigarrow f(a) \quad (\rightsquigarrow \text{обозначает "заменяется на"}).$$

Зафиксируем точку $x \in]a, a + r[$ и введем число A по формуле

$$A = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left(f(x) = f(a) + A \cdot (x - a) \right).$$

Рассмотрим функцию $\psi : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - A \cdot (x - t).$$

¹Мишель РОЛЛЬ (1652-1719) – французский математик, член Парижской АН.

Эта функция непрерывна и дифференцируема на $[a, x]$, так как наследует свойства аналитической функции f и полинома. Кроме того, $\psi(a) = \psi(x) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля на $]a, x[$ найдется такая точка ξ , что $\psi'(\xi) = 0$, или $-f'(\xi) + A = 0$, т.е. $A = f'(\xi)$. Тот же результат получится, если $x \in]a - r, a[$.

Итак, для каждого $x \in]a - r, a + r[$ найдется такая точка ξ , что

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

или

$$f(x) = f(a) + f'(\xi) \cdot (x - a). \quad (10.2.1)$$

Это утверждение называется *теоремой Лагранжа*, а формула (10.2.1) – *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений*.

Если известна какая-нибудь оценка для производной функции f в рассматриваемой окрестности точки a (например, $|f'| \leq M_1$), то из формулы Лагранжа видно, что погрешность от замены $f(x)$ на $f(a)$ не превосходит $M_1 \cdot |x - a|$.

Формула Лагранжа имеет простую геометрическую интерпретацию: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ – угловой коэффициент хорды, соединяющей концы графика функции $y = f(t)$ на $[a, x]$; $f'(\xi)$ – угловой коэффициент касательной к этому графику в точке $\xi \in]a, x[$. Таким образом, теорема Лагранжа утверждает, что на графике функции имеется точка $(\xi, f(\xi))$, в которой *касательная параллельна хорде* (рис.10.2).

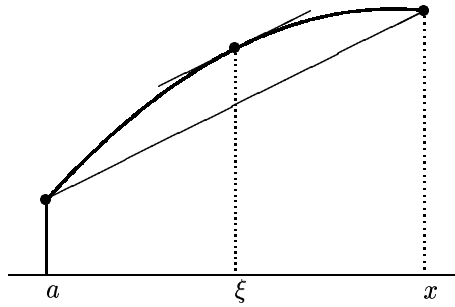


Рис.10.2

Серьезное предупреждение. Считаем необходимым подчеркнуть, что в формуле (10.2.1), так же как и во всех последующих аналогичных формулах, точка ξ зависит от x .

Заменяем теперь функцию f суммой *двух* первых слагаемых определяющего ее ряда Тейлора (полиномом второго порядка):

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a).$$

Для оценивания погрешности, возникающей при такой замене, зафиксируем $x \in]a, a + r[$ и введем число A по формуле

$$A = \frac{f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x - a)}{(x - a)^2} \quad \left(f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + A \cdot (x - a)^2 \right).$$

Рассмотрим функцию $\psi : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - A \cdot (x - t)^2.$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема на $[a, x]$, так как наследует свойства аналитической функции f и полинома. Кроме того, $\psi(a) = \psi(x) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля на $]a, x[$ найдется такая точка ξ , что $\psi'(\xi) = 0$. Вычисляем

$$\psi'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) + 2A \cdot (x - t),$$

$$\psi'(\xi) = -\frac{f''(\xi)}{1!}(x - \xi) + 2A \cdot (x - \xi) = 0.$$

Сокращая на $(x - \xi) \neq 0$, получим $A = \frac{f''(\xi)}{2!}$, откуда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2.$$

Тот же результат получится, если $x \in]a-r, a[$.

Продолжение очевидно: заменим f первыми n слагаемыми определяющего ее ряда Тейлора:

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

и оценим уже известным способом возникающую при этом погрешность. Получим утверждение: для всякого $x \in]a-r, a+r[$ между a и x найдется такая точка ξ , что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n.$$

Мы построили *формулу Тейлора порядка n* , которая представляет функцию f в виде суммы двух слагаемых:

1) *полином Тейлора* (порядка n)

$$T_f(n, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1};$$

2) *остаточный член* формулы Тейлора

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n.$$

Замечания. 1. Обратите внимание на то, что остаточный член формулы Тейлора *похож* на слагаемые полинома Тейлора. Однако все значения производных функции f , содержащиеся в полиноме Тейлора, вычислены в известной точке a . Про точку же ξ , фигурирующую в остаточном члене, известно лишь то, что она лежит между a и x . Из сказанного следует, что значение полинома Тейлора можно *вычислить*, а значение остаточного члена – лишь *оценить*². Обычно бывает известна какая-нибудь оценка модуля n -й производной – $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$. Тогда для остаточного члена имеем оценку

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot (x-a)^n \right| \leq \frac{M_n}{n!} \cdot |x-a|^n$$

2. Анализ рассуждений, приведших к формуле Тейлора, показывает, что требование аналитичности функции f излишне. Справедливость равенства

$$f(x) = T_f(n, a, x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

обеспечивается существованием непрерывной n -й производной функции f в рассматриваемой окрестности точки a .

3. Мы предполагали для определенности, что $x > a$. Нетрудно видеть, что все рассуждения остаются верными и при $x < a$.

Рассмотрим схему применения формулы Тейлора на примере вычисления значений экспоненты в окрестности нуля.

$$\exp(x) = T_{\exp}(n, 0, x) + \frac{\exp^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot x^n.$$

1. Заменяем экспоненту ее полиномом Тейлора:

$$\exp(x) \sim T_{\exp}(n, 0, x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

²"Теорема", утверждающая, что погрешность *вычислить* нельзя, доказывается от противного: если бы мы вычислили погрешность, то смогли бы ее учесть, и она перестала бы быть погрешностью!

2. Оцениваем погрешность такой замены, т.е. модуль остаточного члена формулы Тейлора:

$$|exp(x) - T_{exp}(n, 0, x)| = \left| \frac{exp^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot x^n \right| = \frac{exp(\xi)}{n!} \cdot |x|^n.$$

Пусть, например, замена осуществляется на сегменте $[0, 1]$. Тогда $0 < \xi < 1$, $exp(\xi) < exp(1) = e$. Поэтому

$$|exp(x) - T_{exp}(n, 0, x)| < e \cdot \frac{x^n}{n!} < \frac{e}{n!}.$$

Если $n = 7$, то $\frac{e}{7!} < 5.4 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, замена

$$exp(x) \sim 1 + x + \frac{x^2}{1.5} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$$

обеспечивает при $0 \leq x \leq 1$ абсолютную погрешность, меньшую, чем $5.4 \cdot 10^{-4}$.

10.3. Локальные экстремумы

Формула Тейлора служит основным инструментом локального исследования *гладких* функций (т.е. функций, имеющих достаточно производных для построения формулы Тейлора нужного порядка). Можно сказать, что гладкая функция в достаточно малой окрестности точки "ведет себя так же, как ее полином Тейлора". Это расплывчатое утверждение конкретизируется в п.п. 10.3 и 10.4.

Будем считать в этих пунктах, что функция f задана на некотором сегменте, и точка a не является концом этого сегмента.

Определение. Точка a называется *точкой локального максимума (минимума)* функции f , если у этой точки существует окрестность, для всех x из которой (кроме $x = a$) выполняется неравенство $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$).

Точки локального максимума и точки локального минимума функции называют точками ее *локального экстремума*.

Теорема Ферма³. Непрерывно дифференцируемая функция не имеет экстремума в точках, где ее производная отлична от нуля.

Доказательство. Запишем в точке a формулу Тейлора второго порядка

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2.$$

Пусть $f'(a) \neq 0$. Рассмотрим настолько малую окрестность точки a , чтобы в ней знак приращения функции

$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

определялся первым слагаемым этого приращения:

$$\text{sign}(f(x) - f(a)) = \text{sign}\left(\frac{f'(a)}{1!}(x-a)\right).$$

Это условие будет выполняться, если

$$\left| \frac{f'(a)}{1!}(x-a) \right| > \frac{M_2}{2!}(x-a)^2, \quad \text{т.е.} \quad |x-a| < \frac{2 \cdot |f'(a)|}{M_2},$$

где M_2 – наибольшее значение модуля второй производной функции f на рассматриваемом сегменте.

Если знак приращения функции совпадает со знаком произведения $\frac{f'(a)}{1!}(x-a)$, то очевидно, что приращение функции меняет знак в любой окрестности точки a , следовательно, в этой точке нет экстремума.

Замечание. Мы доказали теорему, предполагая существование у функции второй производной. На самом деле теорема справедлива при наличии у функции лишь непрерывной *первой* производной.

Определение. Точки, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными точками* этой функции.

³Пьер ФЕРМА (1601-1665) – французский юрист и математик, один из основателей аналитической геометрии, автор основного принципа геометрической оптики. Одна из сформулированных им теорем – так называемая „великая теорема Ферма“ – была доказана только в 1995 году.

Пусть теперь a – стационарная точка функции f ($f'(a) = 0$). Предположим, что $f''(a) \neq 0$ и исследуем поведение функции в малой окрестности точки a . Запишем формулу Тейлора третьего порядка

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

($f'(a) = 0$) и найдем такую окрестность точки a , где выполняется неравенство

$$\left| \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \right| > \frac{M_3}{3!}|x-a|^3.$$

(Здесь M_3 – наибольшее значение модуля третьей производной функции на нашем сегменте).

Решение неравенства дает $|x-a| < \frac{3|f''(a)|}{M_3}$. В этой окрестности точки a

$$\text{sign}(f(x) - f(a)) = \text{sign}\left(\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\right) = \text{sign}(f''(a)).$$

Очевидно, что при $f''(a) < 0$ f имеет в точке a локальный максимум, а при $f''(a) > 0$ – локальный минимум.

Если в стационарной точке равна нулю и вторая производная, следует воспользоваться формулой Тейлора более высокого порядка. Мы не будем рассматривать этот случай.

10.4. Направление выпуклости графика гладкой функции

Рассмотрим график функции (рис.10.3)

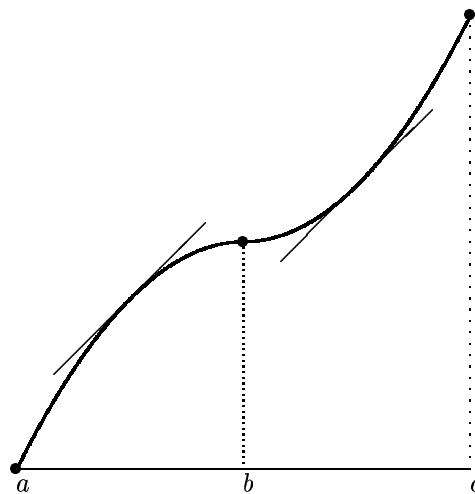


Рис.10.3

В какой бы точке интервала $]a, b[$ ни провести касательную к графику, в некоторой окрестности этой точки график окажется *под этой касательной*. В какой бы точке интервала $]b, c[$ ни провести касательную к графику, в некоторой окрестности этой точки график окажется *над этой касательной*.

Определение. Говорят, что на интервале график функции *направлен выпуклостью вверх (вниз)*, если он лежит *под (над)* касательной, проведенной к нему в любой точке этого интервала.

Теорема. На интервале, где $f'' < 0$ ($f'' > 0$), график функции f направлен выпуклостью вверх (соответственно, вниз).

Доказательство. Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(p, f(p))$, имеет вид

$$Y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p).$$

Найдем разность ординат графика и этой касательной в окрестности точки касания

$$y - Y = f(x) - f(p) - f'(p) \cdot (x - p).$$

Из формулы Тейлора следует, что между точками p и x найдется такая точка ξ , что

$$y - Y = f''(\xi) \frac{(x - p)^2}{2!}.$$

Поэтому при $f'' < 0$ $y - Y < 0$, т.е. график функции лежит над касательной, а при $f'' > 0$ $y - Y > 0$ – график функции лежит под касательной.

Определение. Точка *графика*, разделяющая интервал, где график направлен выпуклостью вверх, и интервал, где график направлен выпуклостью вниз, называется *точкой перегиба графика* (точка $(b, f(b))$ на рис.10.3).

Очевидно, что в точках перегиба графика функции ее вторая производная либо равна нулю, либо не существует. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Например, если $f(x) = x^4$, то $f''(0) = 0$, однако точка $(0, 0)$ не является точкой перегиба графика (на всей оси этот график направлен выпуклостью вверх).