

Глава 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ (ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ)

4.1. Определение и важное соглашение

Определение. Дробно-рациональной функцией (рациональной дробью) называется отношение полиномов

$$f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}, \quad (a_m \neq 0, b_n \neq 0, n > 0).$$

Важное соглашение

Может оказаться, что полином-числитель и полином-знаменатель имеют общий корень – число c . Тогда оба полинома делятся без остатка на двучлен $(z - c)$, и рациональную дробь можно сократить, т.е. разделить и числитель и знаменатель на этот двучлен.

Договоримся не рассматривать рациональные дроби, которые можно сократить, т.е. будем всегда считать, что числитель и знаменатель не имеют общих корней.

Если $m < n$ (степень числителя *строго меньше* степени знаменателя), рациональная дробь называется *правильной*, если $m \geq n$ – *неправильной*. Неправильная рациональная дробь может быть (см. п.3.4) единственным образом представлена в виде суммы полинома и правильной рациональной дроби. Действительно, из (3.4.1) следует, что

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q},$$

и дробь $\frac{R}{Q}$ – правильная (случай, когда числитель делится на знаменатель без остатка, интереса, очевидно, не представляет). Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем, в основном, правильные рациональные дроби.

Итак, мы рассматриваем *правильные и несократимые* рациональные дроби. Корни знаменателя такой дроби называются ее *полюсами*. Кратность корня знаменателя называется кратностью полюса.

Рациональная дробь определена на всей комплексной плоскости за исключением полюсов.

4.2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Определение. Рациональная дробь $\frac{A}{(z - c)^k}$ (A, c – комплексные числа, k – натуральное число) называется *простейшей дробью*.

Теорема. Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей (*разложена на простейшие дроби*), и такое представление единственно.

Доказательство. В силу **Важного соглашения** (п. 4.1) числитель и знаменатель дроби не имеют общих корней. Предположим, что наша дробь имеет полюс c кратности k , т.е. она имеет вид

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - c)^k Q(z)}, \quad P(c) \neq 0, \quad Q(c) \neq 0.$$

Покажем, что существует *единственный* полином R порядка k и *единственный* полином S , такие что

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - c)^k Q(z)} = \frac{R(z)}{(z - c)^k} + \frac{S(z)}{Q(z)}.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{P(z)}{(z - c)^k Q(z)} - \frac{R(z)}{(z - c)^k} = \frac{P(z) - R(z) \cdot Q(z)}{(z - c)^k Q(z)}, \quad (4.2.1)$$

где R – произвольный полином порядка k . Попробуем построить этот полином так, чтобы разность $P - R \cdot Q$ делилась без остатка на $(z - c)^k$. Для этого расположим полиномы P, Q, R по возрастающим степеням двучлена $(z - c)$ (см. (3.1.2)):

$$\begin{aligned} P(z) &= p_0 + p_1(z - c) + \dots + p_{k-1}(z - c)^{k-1} + \dots, \\ Q(z) &= q_0 + q_1(z - c) + \dots + q_{k-1}(z - c)^{k-1} + \dots, \\ R(z) &= r_0 + r_1(z - c) + \dots + r_{k-1}(z - c)^{k-1} \end{aligned}$$

(многоточия в полиномах P и Q означают, что эти полиномы могут содержать и более высокие степени двучлена $(z - c)$). Заметим, что $q_0 = Q(c) \neq 0$!

Вычислим теперь коэффициенты при степенях двучлена в числителе дроби (4.2.1) вплоть до $(k-1)$ -го и приравняем их нулю:

$$\begin{array}{l|l} (z-c)^0 & p_0 - r_0 q_0 \\ (z-c)^1 & p_1 - r_0 q_1 - r_1 q_0 \\ (z-c)^2 & p_2 - r_0 q_2 - r_1 q_1 - r_2 q_0 \\ \dots & \dots \\ (z-c)^{k-1} & p_{k-1} - r_0 q_{k-1} - r_1 q_{k-2} - \dots - r_{k-1} q_0 \end{array} = 0$$

Матрица коэффициентов полученной для определения коэффициентов полинома R системы уравнений – нижняя треугольная, и ее определитель q_0^k отличен от нуля. Поэтому числа r_0, \dots, r_{k-1} (а, следовательно, и полином R) определяются однозначно. Теперь полином $P(z) - R(z) \cdot Q(z)$ делится на $(z-c)^k$ без остатка (по построению). Обозначая полином-частное S , получим

$$P(z) - R(z) \cdot Q(z) = (z-c)^k \cdot S(z),$$

откуда

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-c)^k Q(z)} = \frac{R(z)}{(z-c)^k} + \frac{S(z)}{Q(z)}.$$

Выделяя таким образом последовательно все полюсы, получим представление правильной несократимой рациональной дроби в виде

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-c_1)^{k_1} \dots (z-c_m)^{k_m}} = \frac{R_1(z)}{(z-c_1)^{k_1}} + \dots + \frac{R_m(z)}{(z-c_m)^{k_m}}. \quad (4.2.2)$$

Поскольку полиномы R_j ($j = 1, \dots, m$) уже расположены по возрастающим степеням $(z-c_j)$, получим далее

$$\frac{R_j(z)}{(z-c_j)^{k_j}} = \frac{r_0^{(j)} + r_1^{(j)}(z-c_j) + \dots + r_{k_j-1}^{(j)}(z-c_j)^{k_j-1}}{(z-c_j)^{k_j}} = \frac{r_0^{(j)}}{(z-c_j)^{k_j}} + \frac{r_1^{(j)}}{(z-c_j)^{k_j-1}} + \dots + \frac{r_{k_j-1}^{(j)}}{z-c_j},$$

что завершает доказательство теоремы. Числа, стоящие в числителях простейших дробей, могут быть найдены так называемым *методом неопределенных коэффициентов*, который мы продемонстрируем на примере.

Пример. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{z^2 + 1}{(z-1)^3(z^2 + 3)}.$$

Выделим полюсы и представим эту дробь в виде (4.2.2) с неизвестными пока коэффициентами:

$$\begin{aligned} & \frac{z^2 + 1}{(z-1)^3(z+i\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})} = \\ & = \frac{r_0 + r_1(z-1) + r_2(z-1)^2}{(z-1)^3} + \frac{s}{z+i\sqrt{3}} + \frac{v}{z-i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем в числителях дробей, стоящих слева и справа от знака равенства, коэффициенты при одинаковых степенях переменной z :

$$\begin{array}{l|l} z^4 & r_2 + s + v \\ z^3 & r_1 - 2r_2 - (3 + \sqrt{3}i)s - (3 - \sqrt{3}i)v \\ z^2 & r_0 - r_1 + 4r_2 + (3 + \sqrt{3}i)s + (3 - \sqrt{3}i)v \\ z^1 & 3r_1 - 6r_2 - (1 + 3\sqrt{3}i)s - (1 - 3\sqrt{3}i)v \\ z^0 & 3r_0 - 3r_1 + 3r_2 + \sqrt{3}is - \sqrt{3}iv \end{array} = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}.$$

В силу доказанной выше теоремы эта система линейных уравнений имеет единственное решение. Применив алгоритм Гаусса-Жордана, получим

$$r_0 = 1/2, \quad r_1 = 1/4, \quad r_2 = 0, \quad s = -i\sqrt{3}/24, \quad v = i\sqrt{3}/24.$$

Серьезное предупреждение. С "докомпьютерных" времен у человека сохранилось естественное отвращение к работе с комплексными числами. Поэтому при разложении вещественных рациональных дробей на простейшие иногда используют в случае сопряженных комплексных полюсов так называемые "простейшие дроби второго типа":

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q},$$

где A, B, p, q – вещественные числа, а корни квадратного трехчлена в знаменателе – комплексные.

Это существенно усложняет задачу и не дает никакого выигрыша, поскольку (в отличие от человека) компьютер легко справляется с "комплексной арифметикой". Мы настоятельно рекомендуем не пользоваться простейшими дробями второго типа.

4.3. Непрерывность рациональной дроби

Рассмотрим простейшую дробь $f(z) = \frac{1}{z^n}$ с полюсом в начале координат. Зафиксируем точку $p \neq 0$ и оценим разность $f(z) - f(p)$, считая, что переменная точка z берется внутри круга с центром в точке p и радиусом $|p|/2$ (рис. 4.1).

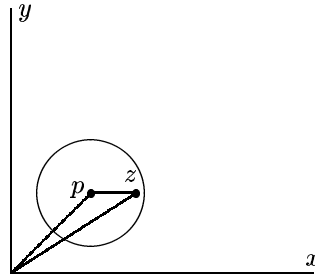


Рис. 4.1

$$f(z) - f(p) = \frac{1}{z^n} - \frac{1}{p^n} = \frac{p^n - z^n}{p^n z^n} = (p - z) \cdot \frac{p^{n-1} + p^{n-2}z + \dots + pz^{n-2} + z^{n-1}}{p^n z^n}.$$

$$|f(z) - f(p)| \leq \frac{|p - z|}{|p|^n |z|^n} \cdot (|p|^{n-1} + |p|^{n-2}|z| + \dots + |p||z|^{n-2} + |z|^{n-1}). \quad (4.3.1)$$

Так как $\frac{|p|}{2} < |z| < \frac{3|p|}{2}$, усилим неравенство (4.3.1), заменив в правой его части: в знаменателе $|z|$ – на меньшее число $|p|/2$, а в скобке $|z|$ – на большее число $3|p|/2$.

$$|f(z) - f(p)| \leq |p - z| \cdot \frac{(|p|^{n-1} + \frac{3}{2}|p|^{n-1} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} |p|^{n-1})}{\frac{|p|^n}{2^n} |p|^n} = |p - z| \cdot \frac{2(3^n - 2^n)}{|p|^{n+1}} = M \cdot |z - p|.$$

Здесь $M = \frac{2(3^n - 2^n)}{|p|^{n+1}}$ – положительное число.

Из полученного неравенства следует, что значение нашей простейшей дроби в точке z можно сделать как угодно близким к ее значению в точке p за счет приближения z к p . Точнее: для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \min(|p|/2, \varepsilon/M)$, что

$$|z - p| < \delta \implies |f(z) - f(p)| < \varepsilon.$$

Поскольку точка p произвольна, мы доказали непрерывность нашей простейшей дроби в любой точке ее области определения.

Небольшое усложнение проведенного выше рассуждения позволяет установить и непрерывность простейшей дроби $\frac{1}{(z - c)^n}$ в любой точке ее области определения.

Докажем теперь важное вспомогательное утверждение. Пусть функции f_1 и f_2 определены в некоторой окрестности точки p , и существует такое положительное число M , что в этой окрестности выполняются неравенства

$$|f_1(z) - f_1(p)| \leq M|z - p|, \quad |f_2(z) - f_2(p)| \leq M|z - p|.$$

Тогда для линейной комбинации этих функций $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ имеем

$$\begin{aligned} |f(z) - f(p)| &= |(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(z) - (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(p)| \leq \\ &\leq |\alpha_1| |f_1(z) - f_1(p)| + |\alpha_2| |f_2(z) - f_2(p)| \leq \\ &\leq (|\alpha_1| + |\alpha_2|) M \cdot |z - p|. \end{aligned}$$

Это утверждение очевидным образом распространяется на линейную комбинацию любого конечного числа функций. Учитывая, что любая рациональная дробь представима в виде суммы полинома и линейной комбинации конечного числа простейших дробей, получаем

Следствие. Любая рациональная дробь непрерывна в любой точке ее определения.

4.4. Поведение рациональной дроби в окрестности полюса

Ограничимся рассмотрением случая простейшей дроби

$$f(z) = \frac{1}{(z - c)^n}.$$

Перейдем к полярным координатам с началом в полюсе

$$z = c + r \cdot \exp(i\varphi) \implies f(z) = \frac{\exp(-i\varphi)}{r^n} \implies |f(z)| = \frac{1}{r^n}.$$

Очевидно, что модуль $f(z)$ можно сделать как угодно большим за счет приближения точки z к полюсу. Точнее: для любого положительного числа E можно указать такое положительное число $\delta = E^{-1/n}$, что

$$0 < |z - c| < \delta \implies |f(z)| > E.$$

Полученный результат обычно выражают словами: "простейшая дробь *не ограничена* в окрестности своего полюса".

Можно показать, что всякая рациональная дробь не ограничена в окрестности каждого своего полюса.

4.5. Почему не следует работать с сократимыми рациональными дробями

Начнем с примера. Пусть

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R}); \quad g(x) = \frac{x^2}{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0) \quad (\text{рис. 4.3}).$$

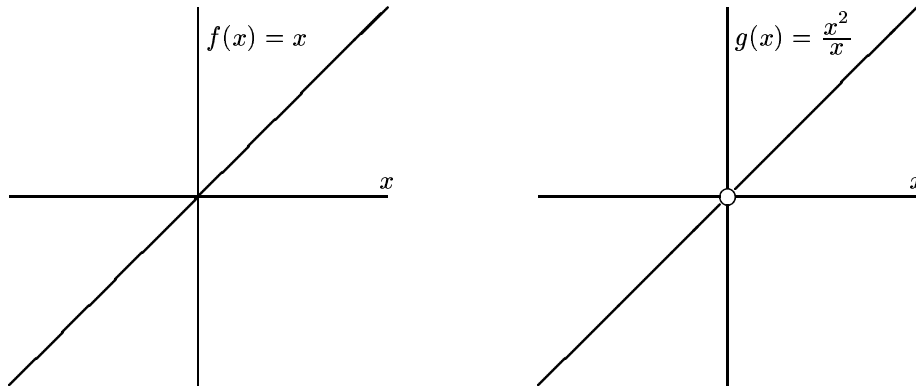


Рис. 4.3.

Эти функции совпадают всюду, кроме одной точки ($x = 0$), где g не определена (график функции g получен удалением из графика f начала координат). Если доопределить g , положив $g(0) = 0$, то она совпадет с f уже всюду и, в частности, станет *непрерывной* в точке $x = 0$. В то же время очевидно, что формально f получается из g *сокращением* последней на x .

Далее возможны два пути:

1. Отказаться от рассмотрения сократимых рациональных дробей, т.е., в частности, не различать функции

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R}); \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{x^2}{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0),$$

что равносильно *доопределению* функции g в нуле *по непрерывности*.

2. Считать f и g разными функциями, а число ноль называть *пределом функции g в точке $x = 0$* . Пишут:

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \quad (\text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x)).$$

С нашей точки зрения первый путь проще, и последовательное его проведение существенно облегчает *пользователю* изучение математики. В то же время нам не известны случаи возникновения на этом пути каких-либо затруднений и, тем более, противоречий.

Поэтому мы не будем работать с сократимыми рациональными дробями (а позже – и с другими функциями, имеющими точки *устранимого* разрыва).

Мы будем такие точки устранять!

При этом предел функции в точке либо будет совпадать с ее значением (и поэтому не будет представлять интереса), либо не будет существовать. Так, например, в полюсе, т.е. в точке, являющейся корнем знаменателя *несократимой* рациональной дроби, никаким доопределением этой дроби сделать ее непрерывной нельзя – рациональная дробь в полюсе не имеет предела.

Такая точка зрения согласуется со взглядами известных математиков XX века Н. Н. Лузина¹ и Л. Берса² Рассматривая рациональную дробь

$$\frac{x^m}{x^n} \cdot \frac{\phi(x)}{\psi(x)}, \quad \text{где} \quad \psi(0) \neq 0 \quad \text{и} \quad m \geq n,$$

Н.Н.Лузин пишет: "Естественно рассматривать этот случай как случай кажущегося разрыва, обязанного не недостаткам самой функции (в геометрическом смысле), а лишь некоторому недостатку дающей эту функцию формулы, утрачивающей свой числовой смысл при $x = 0$. Что подобного рода утрата числового смысла той или иной формулой может произойти чисто случайно, читатель заметит из того обстоятельства, что достаточно написать любую непрерывную функцию $f(x)$ в виде $\frac{x \cdot f(x)}{x}$ или в виде $1/x + f(x) - 1/x$, как уже новая формула утрачивает числовой смысл в точке $x = 0$ ".

Л. Берс: "Работая с рациональными функциями, мы часто будем предполагать, что каждый линейный множитель, входящий одновременно в числитель и в знаменатель, уже сокращен, и что область определения функции соответствующим образом расширена".

Против этой точки зрения категорически возражают лишь преподаватели-репетиторы, ибо она отнимает у них возможность "обучать" всевозможным хитроумным приемам "вычисления" пределов.

¹Николай Николаевич ЛУЗИН (1883-1950) – действительный член АН СССР и ряда зарубежных академий, основатель московской школы теории функций. Цитируется учебник В. Грэнвилля и Н. Лузина, Элементы дифференциального и интегрального исчисления, "ГИЗ", М.-Л., 1931.

²Липман БЕРС (р. 1914) – профессор Колумбийского университета (США), президенти Американского математического общества, глава отделения математики Национальной Академии наук США. Цитируется учебник Л. Берс, Математический анализ, "Высшая школа", М., 1975.