

### Глава 3. ПОЛИНОМЫ (МНОГОЧЛЕНЫ)

#### 3.1. Определение и стандартное представление

Определение. Полиномом степени  $n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) называется функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , действующая по правилу

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad (3.1.1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – заданные числа (коэффициенты полинома) и  $a_n \neq 0$ .

К полиномам относят также функцию, равную нулю во всех точках  $\mathbb{C}$ . Степень этого полинома не определена.

Примеры.

$$\begin{aligned} f(z) &\equiv 0 && (\text{нуль-полином, степень не определена}); \\ f(z) &\equiv 5 && (\text{полином нулевой степени}); \\ f(z) &= 1 - 5z && (\text{полином первой степени}); \\ f(z) &= 2z - 5z^7 && (\text{полином седьмой степени}). \end{aligned}$$

Отметим, что полиномы и их отношения (так называемые *рациональные дроби*, рассматриваемые в гл. 4) – это единственные функции, вычисляемые компьютером непосредственно, ибо компьютер выполняет только сложение, вычитание, умножение и деление чисел. Поэтому полиномы и рациональные дроби являются сегодня истинными "элементарными функциями", и следует освоить технику работы с ними.

В зависимости от задачи один и тот же полином целесообразно записывать в разных формах. Форму (3.1.1) мы будем называть *стандартным представлением полинома*.

Рассмотрим еще одно представление: покажем, что возможно разложить полином не по степеням переменной  $z$  (как в стандартном представлении), а по степеням двучлена  $(z - p)$

$$f(z) = b_0 + b_1(z - p) + \dots + a_n(z - p)^n, \quad (3.1.2)$$

где  $p$  – произвольное число.

Действительно, заменим в стандартном представлении полинома  $z$  на  $w + p$

$$f(w + p) = a_0 + a_1(w + p) + \dots + a_n(w + p)^n.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$f(w + p) = b_0 + b_1 w + \dots + b_{n-1} w^{n-1} + a_n w^n,$$

где  $b_k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  – некоторые числа (зависящие, конечно, от  $p$ ). В частности, положив  $w = 0$ , получим  $b_0 = f(p)$ . Заменив  $w$  на  $z - p$ , придем к (3.1.2).

#### 3.2. Схема Горнера

При стандартном представлении полинома его значения следует вычислять по так называемой *схеме Горнера*<sup>1</sup>

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = \underbrace{(\dots (a_n z + a_{n-1}) \cdot z + a_{n-2}) + \dots + a_1}_{n-1} \cdot z + a_0.$$

Такой способ вычисления имеет два преимущества.

Первое – очевидное: минимизируется количество арифметических операций. Действительно, для вычисления значения полинома степени  $n$  по схеме Горнера требуется  $n$  сложений и  $n$  умножений. При вычислении же по формуле (3.1.1) потребуется  $n$  сложений и  $\frac{n(n+1)}{2}$  умножений (проверьте!).

Второе – совсем не очевидное: при вычислении по схеме Горнера существенно уменьшается вычислительная погрешность. Например, вычисляя с помощью MAPLE значение полинома

$$f(z) = 2z^6 - 396z^5 - 396z^4 - 396z^3 - 396z^2 - 396z - 197$$

при  $z = 199$  с шестью верными значащими цифрами, получаем:

по формуле (3.1.1) –  $f(199) = -159481000$ ,

по схеме Горнера –  $f(199) = 201$  (точное значение!).

<sup>1</sup>Вильям Джордж ГОРНЕР (1786-1837) – английский математик.

### 3.3. Корни полинома. Разложение полинома на множители первой степени

Определение. Число  $c \in \mathbb{C}$  называется *корнем* полинома  $f$ , если  $f(c) = 0$ .

Примеры. 1. Полином нулевой степени не имеет корней:

$$f(z) = a_0 \neq 0.$$

2. Полином первой степени имеет один корень

$$f(z) = a_0 + a_1 z = 0 \implies z_1 = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Отметим, что полином первой степени представим в виде

$$f(z) = a_0 + a_1 z = a_1 \cdot (z - z_1).$$

3. Полином второй степени имеет два корня (они могут и совпадать):

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = 0 \implies \\ \implies z_1 &= -\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}, \\ z_2 &= -\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \end{aligned}$$

(здесь символ  $\sqrt{A}$  обозначает любое из решений уравнения  $z^2 = A$ ).

Используя формулы Виета, легко проверить, что полином второй степени представим в виде

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = a_2 \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2).$$

Эта формула верна и при  $z_1 = z_2$ .

Можно показать, что всякий полином степени  $n$  имеет ровно  $n$  корней и может быть представлен в виде

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = a_n \cdot (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n), \quad (3.3.1)$$

где  $z_1, \dots, z_n$  – корни полинома (не обязательно попарно различные). Это утверждение называют *основной теоремой алгебры*.

Естественно объединить одинаковые сомножители в (3.3.1)

$$f(z) = a_n \cdot (z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_m)^{k_m}. \quad (3.3.2)$$

Здесь  $z_1, \dots, z_m$  – *попарно различные* корни полинома, а натуральные числа  $k_1, \dots, k_m$  называются *кратностями* соответствующих корней. Корень кратности 1 обычно называют *простым*. Очевидно, что  $k_1 + \dots + k_m = n$ .

Выражение (3.3.2) называют *разложением полинома на множители первой степени* или *мультипликативным представлением полинома*.

Пример. Если  $f(z) = 3 \cdot (z - 2) \cdot (z + 5)^3 \cdot (z - i)^2$ , то  $z_1 = 2$  – простой корень,  $z_2 = -5$  – корень кратности 3,  $z_3 = i$  – корень кратности 2.

Замечание. Если  $f$  – полином с вещественными коэффициентами, то  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  (проверьте это!). Поэтому, если  $z$  – корень такого полинома, то  $\bar{z}$  – также его корень. Таким образом, все корни полинома с вещественными коэффициентами либо вещественны, либо образуют комплексно сопряженные пары, причем кратности корней в такой паре, очевидно, совпадают.

Серьезное предупреждение. Задача отыскания корней полинома численно неустойчива, т.е. малые изменения коэффициентов полинома могут вызывать большие изменения его корней. Приведем простой пример.

Пусть требуется найти корни полинома  $f(z) = (z - 1)^n$ , и свободный член имеет абсолютную погрешность  $\varepsilon$ , т.е. фактически вместо уравнения  $(z - 1)^n = 0$  решается уравнение  $(z - 1)^n = \varepsilon$ . Все его корни расположены на окружности с центром в точке  $(0, 1)$  и радиусом  $\varepsilon^{1/n}$ .

Абсолютная погрешность найденных корней (она же и относительная) равна  $\varepsilon^{1/n}$ . Следовательно, погрешность определения корня превышает относительную погрешность свободного члена в  $\varepsilon^{1/n-1}$  раз. Например,

допустив погрешность в свободном члене полинома шестой степени всего в седьмой значащей цифре ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ), получим "коэффициент усиления" погрешности  $10^5$ !

### 3.4. Деление полинома на полином

Из курса линейной алгебры известно, что пространством полиномов *порядка*  $n$  называется множество, состоящее из всех полиномов, степень которых строго меньше, чем  $n$ , и нуль-полинома.

Пусть  $P$  – полином степени  $n$ ,  $Q$  – полином степени  $m$  ( $m \leq n$ ). Можно показать, что существуют такие полиномы  $S$  (степени  $n - m$ ) и  $R$  (порядка  $m$ ), что

$$P = Q \cdot S + R, \quad (3.4.1)$$

причем полиномы  $S$  и  $R$  определяются единственным образом. По аналогии с делением чисел полином  $P$  называют делимым, полином  $Q$  – делителем, полином  $S$  – частным и полином  $R$  – остатком.

Сформулированное утверждение мы проиллюстрируем примером, из которого будет ясен способ доказательства. Итак, пусть

$$\begin{aligned} P(z) &= p_5 z^5 + p_4 z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0 \quad (p_5 \neq 0) \\ Q(z) &= q_2 z^2 + q_1 z + q_0 \quad (q_2 \neq 0) \end{aligned}$$

Полином  $S$  должен иметь *степень* 3, а полином  $R$  – *порядок* 2. Запишем эти полиномы в виде

$$S(z) = s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z + s_0 \quad (s_3 \neq 0), \quad R(z) = r_1 z + r_0,$$

( $r_0, r_1, s_0, s_1, s_2, s_3$  подлежат определению).

Подставив  $P, Q, S, R$  в (3.4.1), получим

$$\begin{aligned} p_5 z^5 + p_4 z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0 = \\ (q_2 z^2 + q_1 z + q_0) \cdot (s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z + s_0) + r_1 z + r_0. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной в обеих частях уравнения, получим линейную систему относительно искомых коэффициентов.

$$\begin{array}{lcl} z^5 & q_2 s_3 & = p_5 \\ z^4 & q_1 s_3 + q_2 s_2 & = p_4 \\ z^3 & q_0 s_3 + q_1 s_2 + q_2 s_1 & = p_3 \\ z^2 & q_0 s_2 + q_1 s_1 + q_2 s_0 & = p_2 \\ z^1 & q_0 s_1 + q_1 s_0 + 1 \cdot r_1 & = p_1 \\ z^0 & q_0 s_0 + 0 \cdot r_1 + 1 \cdot r_0 & = p_0 \end{array}.$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы (нижней треугольной) отличен от нуля (он равен  $q_2^4$ ), следовательно система имеет единственное решение. Кроме того, из первого уравнения  $s_3 = \frac{p_5}{q_2} \neq 0$ , т.е. полином-частное действительно имеет степень 3. В то же время полином-остаток имеет порядок 2, т.е. может оказаться и нуль-полиномом ( $P$  может делиться на  $Q$  без остатка).

### 3.5. Непрерывность полинома

Пусть  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  – произвольный полином степени  $n$ . Зафиксируем на комплексной плоскости точку  $p$ , а точку  $z$  сделаем переменной. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} f(z) - f(p) &= \\ &= (a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) - (a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) = \\ &= a_1(z - p) + a_2(z^2 - p^2) + \dots + a_n(z^n - p^n) = \\ &= (z - p) \cdot (a_1 + a_2(z + p) + \dots + a_n(z^{n-1} + z^{n-2}p + \dots + p^{n-1})). \end{aligned}$$

Оценим модуль этой разности, считая, что точка  $z$  лежит внутри круга с центром в точке  $p$  и радиусом  $\rho$ , т.е.  $|z - p| < \rho$ . Из рис. 3.1 видно, что  $|z| < q = |p| + \rho$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |f(z) - f(p)| &\leq |z - p| \cdot (|a_1| + |a_2|(q + |p|) + \dots \\ &\dots + |a_n|(q^{n-1} + q^{n-2}|p| + \dots + q|p|^{n-2} + |p|^{n-1})). \end{aligned}$$

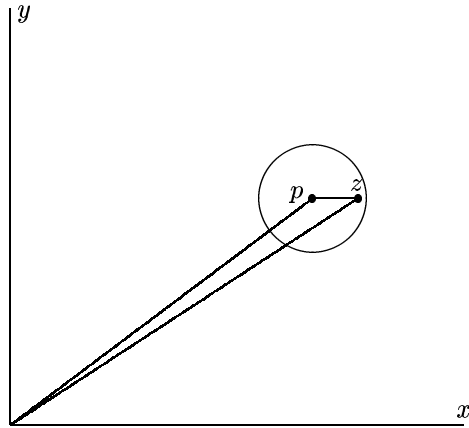


Рис. 3.1

Содержимое большой скобки в правой части неравенства положительно и не зависит от  $z$ . Обозначив его  $M$ , получим

$$|f(z) - f(p)| \leq M \cdot |z - p|.$$

Из последнего неравенства следует, что значение полинома в точке  $z$  можно сделать как угодно близким к его значению в точке  $p$  за счет приближения  $z$  к  $p$ . Точнее:

Для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать такое положительное число  $\delta$ , что

$$|z - p| < \delta \implies |f(z) - f(p)| < \varepsilon. \quad (3.5.1)$$

Очевидно, что достаточно взять  $\delta = \min(\rho, \frac{\varepsilon}{M})$ .

Определение. Функция, обладающая свойством (3.5.1), называется *непрерывной* в точке  $p$ .

Поскольку в нашем случае комплексное число  $p$  произвольно, мы доказали, что полином непрерывен в любой точке своей области определения (комплексной плоскости).