

Глава 8. ПРОИЗВОДНАЯ

8.1. Определение производной

Напомним одну известную из школьного курса задачу, приводящую к понятию производной. На графике функции f взяты две точки – фиксированная $(a, f(a))$ и переменная $(x, f(x))$ (рис.8.1). Через эти точки проведена прямая (секущая)

$$y - f(a) = k_c \cdot (x - a).$$

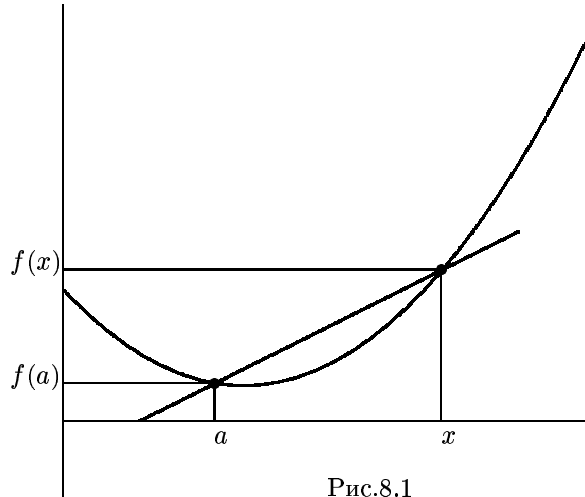


Рис.8.1

Угловым коэффициентом этой секущей

$$k_c = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Что произойдет, если переменная точка совпадет с фиксированной?

Пусть, например, $f(x) = x^2$. Тогда

$$k_c = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

(если рациональная дробь сократима, то ее необходимо сократить!) Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \Big|_{x=a} = 2a.$$

Таким образом, при совпадении переменной точки (x, x^2) с фиксированной (a, a^2) секущая превратится в прямую, проходящую через точку (a, a^2) и имеющую угловой коэффициент $k = 2a$:

$$y - a^2 = 2a \cdot (x - a).$$

Как известно, эта прямая именуется *касательной* к графику функции $y = x^2$ в точке (a, a^2) .

Введем теперь

Определение. Пусть задана функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Зафиксируем точку $a \in \mathbb{C}$, точку $z \in \mathbb{C}$ сделаем переменной и рассмотрим *разностное отношение*

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Значение этого разностного отношения при $z = a$ (если оно определено в этой точке) называется *производной* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Итак,

$$f'(a) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \Big|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Пример. $f(z) = z^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^n - a^n}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - a) \cdot (z^{n-1} + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1})}{z - a} = \\ &= (z^{n-1} + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1}) \Big|_{z=a} = na^{n-1}. \end{aligned}$$

В рассмотренном примере точка a , в которой вычисляется производная функции $f(x) = x^n$, произвольна. Это дает основание рассматривать новую функцию, значение которой в каждой точке (число) есть производная функции f в этой точке. Эту новую функцию называют *производной функцией* от функции f и обозначают f' (читают "эф штрих"). Итак,

$$f(z) = z^n \implies f'(z) = nz^{n-1}.$$

Далее можно ввести понятие *второй производной функции* от функции f

$$f'' = (f')'; \quad f''(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z) - f'(a)}{z - a}.$$

Аналогично вводится (по индукции) понятие *производной функции порядка n* от функции f .

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'; \quad f^{(n)}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(a)}{z - a}.$$

Пример.

$$f(z) = z^4 \implies f'(z) = 4 \cdot z^3, \quad f''(z) = 3 \cdot 4 \cdot z^2, \quad f^{(3)}(z) = 2 \cdot 3 \cdot 4z, \quad f^{(4)}(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = \text{const}.$$

Прежде, чем вычислять пятую производную функцию, покажем, что в силу наших определений производная функция от функции-константы равна нулю тождественно.

Действительно, пусть $f(z) \equiv p \in \mathbb{C}$. Вычислим производную этой функции в точке $a \in \mathbb{C}$:

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{p - p}{z - a} = \frac{0}{z - a} \Big|_{z=a}.$$

Дробь $\frac{0}{z-a}$ равна нулю во всех точках, кроме $z = a$, где она не определена. В силу нашего Важного соглашения она доопределяется в этой точке *по непрерывности*, т.е. нулем. Поэтому

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{0}{z - a} = 0$$

Итак, $f^{(n)}(z) \equiv 0$ при $n > 4$.

8.2. Техника дифференцирования

В нашем распоряжении есть следующие способы "конструирования функций".

1. Образование линейных комбинаций: заданы (на одном и том же множестве $Z \subset \mathbb{C}$) функции f_1, \dots, f_n .

Новая функция $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – заданные числа) строится по правилу

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(z) \quad \text{для всех } z \in Z.$$

2. Степенной ряд.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad (\text{функция задана внутри круга сходимости ряда}).$$

3. Умножение: заданы (на одном и том же множестве $Z \subset \mathbb{C}$) функции f_1 и f_2 . Новая функция $f = f_1 \cdot f_2$ строится по правилу

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \quad \text{для всех } z \in Z.$$

4. Деление: заданы (на одном и том же множестве $Z \subset \mathbb{C}$) функции f_1 и f_2 ; f_2 не обращается в нуль. Новая функция $f = f_1/f_2$ строится по правилу

$$f(z) = f_1(z)/f_2(z) \quad \text{для всех } z \in Z.$$

5. Композиция функций.

6. Обратная функция.

Для вычисления производных функций (*дифференцирования функций*), построенных с помощью шести описанных выше приемов, необходимо:

- 1) знать таблицу производных функций для некоторого набора "простейших" функций;
- 2) уметь находить производные функции для аналитической функции, для линейной комбинации, произведения, частного, композиции, обратной функции.

Сводку таких правил и называют обычно "техникой дифференцирования".

1. Если существуют

$$f'_1(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z) - f_1(a)}{z - a}, \dots, f'_n(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_n(z) - f_n(a)}{z - a}$$

и $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$, то

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{f_k(z) - f_k(a)}{z - a} \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_k(z) - f_k(a)}{z - a} = \sum_{k=1}^n \alpha_k f'_k(a).$$

Производная линейной комбинации функций равна линейной комбинации производных этих функций (с теми же коэффициентами).

Пример. Производная полинома. Если

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

то

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1} = \sum_{k=1}^n a_k z^{k-1}, \quad f''(z) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n z^{n-2} = \sum_{k=1}^n a_k z^{k-2}, \dots$$

$$\dots, f^{(n)}(z) = n!, \dots, f^{(m)}(z) \equiv 0 \quad \text{при } m > n.$$

Обратите внимание на *нижний* индекс суммирования!

2. Можно показать, что аналитическая функция внутри круга сходимости определяющего ее степенного ряда имеет производные всех порядков, и они находятся "почленным дифференцированием", т.е.

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right)'' = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2},$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right)''' = \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3}, \dots, \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right)^{(m)} = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)(k-2) \dots (n-k+1) a_k z^{k-n}.$$

и т.д. (Сравните с производной полинома!)

Примеры.

$$\exp'(z) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z).$$

$$\exp'(z) \equiv \exp(z).$$

$$\sin'(z) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)z^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos(z)$$

$$\boxed{\sin'(z) \equiv \cos(z).}$$

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2kz^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} = \\ &= - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(z) \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos'(z) \equiv -\sin(z).}$$

3. Если существуют $f_1'(a)$, $f_2'(a)$ и $f = f_1 \cdot f_2$, то

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z) \cdot f_2(z) - f_1(a) \cdot f_2(a)}{z - a} = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z) \cdot f_2(z) - f_1(a) \cdot f_2(z) + f_1(a) \cdot f_2(z) - f_1(a) \cdot f_2(a)}{z - a} = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{f_1(z) - f_1(a)}{z - a} \cdot f_2(z) \right) + \lim_{z \rightarrow a} \left(f_1(a) \cdot \frac{f_2(z) - f_2(a)}{z - a} \right) = f_1'(a) \cdot f_2(a) + f_1(a) \cdot f_2'(a) \end{aligned}$$

$$\boxed{(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'}$$

4. Если существуют $f_1'(a)$, $f_2'(a)$, $f_2(a) \neq 0$ и $f = f_1/f_2$, то

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z)/f_2(z) - f_1(a)/f_2(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z) \cdot f_2(a) - f_1(a) \cdot f_2(z)}{f_2(z) \cdot f_2(a) \cdot (z - a)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z) \cdot f_2(a) - f_1(a) \cdot f_2(a) - (f_1(a) \cdot f_2(z) - f_1(a) \cdot f_2(a))}{f_2(z) \cdot f_2(a) \cdot (z - a)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\frac{f_1(z) - f_1(a)}{z - a} \cdot f_2(a) - f_1(a) \frac{f_2(z) - f_2(a)}{z - a}}{f_2(z) \cdot f_2(a)} = \frac{f_1'(a) \cdot f_2(a) - f_1(a) \cdot f_2'(a)}{f_2^2(a)} \end{aligned}$$

$$\boxed{(f_1/f_2)' = \frac{f_1' \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^2}}$$

Примеры.

$$\begin{aligned} tg'(z) &= \left(\frac{\sin}{\cos} \right)'(z) = \frac{\sin'(z) \cdot \cos(z) - \sin(z) \cdot \cos'(z)}{\cos^2(z)} = \\ &= \frac{\cos^2(z) + \sin^2(z)}{\cos^2(z)} = 1 + tg^2(z) \end{aligned}$$

$$\boxed{tg'(z) \equiv 1 + tg^2(z).}$$

$$\begin{aligned} ctg'(z) &= \left(\frac{\cos}{\sin} \right)'(z) = \frac{\cos'(z) \cdot \sin(z) - \cos(z) \cdot \sin'(z)}{\sin^2(z)} = \\ &= \frac{-\sin^2(z) - \cos^2(z)}{\sin^2(z)} = -(1 + ctg^2(z)) \end{aligned}$$

$$\boxed{ctg'(z) \equiv -(1 + ctg^2(z)) .}$$

5. Производная композиции (рис.8.2)

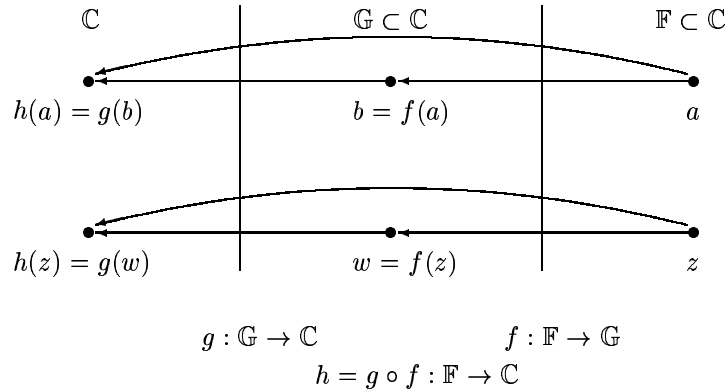


Рис.8.2

$$h'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} \cdot \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Поскольку из $z = a$ следует $w = b$, получаем

$$h'(a) = \lim_{w \rightarrow b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = g'(b) \cdot f'(a).$$

Производная композиции равна *произведению* производных функций от функций, составляющих эту композицию.

Пример. $w = f(z) = \sin(z)$, $g(w) = w^2$; $h(z) = (g \circ f)(z) = \sin^2(z)$.

$$h'(z) = g'(w) \cdot f'(z) = 2w \cdot \cos(z) = 2\sin(z) \cdot \cos(z).$$

6. Производная обратной функции (рис.8.3)

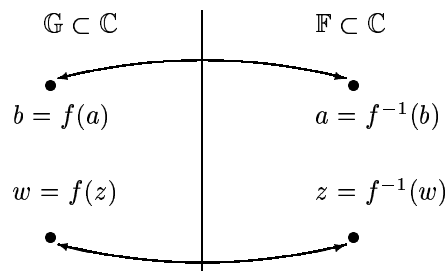


Рис.8.3

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(b) &= \lim_{w \rightarrow b} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(b)}{w - b} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{f(z) - f(a)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(z) - f(a)}{z - a}} = \frac{1}{f'(a)}. \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что $f'(a) \neq 0$.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Пример. $\ln = \exp^{-1}$.

$$w = \ln(z); \quad z = \exp(w); \quad \ln'(z) = \frac{1}{\exp'(w)} = \frac{1}{\exp(w)} = \frac{1}{z}.$$

$$\ln'(z) = \frac{1}{z}.$$

Производная степенной функции (композиция логарифма и экспоненты)

$$(z^\alpha)' = (\exp(\alpha \cdot \ln(z)))' = \exp(\alpha \cdot \ln(z)) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{z} = \alpha \cdot z^{\alpha-1}.$$

$$(z^\alpha)' = \alpha \cdot z^{\alpha-1}.$$

8.3. Ряд Тейлора

Пусть аналитическая функция f определена в некотором круге с центром в точке p :

$$f(z) = a_0 + a_1(z-p) + a_2(z-p)^2 + a_3(z-p)^3 + \dots + a_n(z-p)^n + \dots$$

Полагая $z = p$, получим $f(p) = a_0$.

Продифференцируем f :

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 \cdot (z-p) + 3a_3 \cdot (z-p)^2 + \dots + na_n \cdot (z-p)^{n-1} + \dots$$

Полагая $z = p$, получим $f'(p) = a_1$.

Далее,

$$f''(z) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2a_3 \cdot (z-p) + \dots + n \cdot (n-1)a_n \cdot (z-p)^{n-2} + \dots$$

Полагая $z = p$, получим $f''(p) = 1 \cdot 2 \cdot a_2$.

Нетрудно видеть, что

$$f^{(n)}(p) = n!a_n, \text{ откуда } a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}.$$

Эта формула верна и при $n = 0$ (полагают по определению $f^{(0)} = f$).

Мы получили представление аналитической функции в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n. \quad (8.3.1)$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (8.3.1) называется *рядом Тейлора*¹ аналитической функции f в окрестности точки p .

Примеры. 1. Для любого натурального n $\exp^{(n)}(p) = \exp(p)$. Поэтому

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(p)}{n!} (z-p)^n.$$

Заметим, что мы получили известное тождество

$$\exp(z) \equiv \exp(p) \cdot \exp(z-p).$$

2. $f(z) = \ln(1+z)$, $f(0) = 0$. Последовательно дифференцируя, получаем

¹Брук ТЕЙЛОР (1685-1731) – английский математик, ученый секретарь Лондонского Королевского общества.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= (1+z)^{-1}, & f'(0) &= 1; \\
f''(z) &= (-1) \cdot (1+z)^{-2}, & f''(0) &= -1; \\
f^{(3)}(z) &= (-1) \cdot (-2) \cdot (1+z)^{-3}, & f^{(3)}(0) &= 1 \cdot 2; \\
&\vdots & & \vdots \\
f^{(n)}(z) &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+z)^{-n}, & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!.
\end{aligned}$$

Итак, в некоторой окрестности нуля

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Найдем радиус сходимости этого ряда, используя признак д'Аламбера:

$$D(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z|^k (k-1)}{k |z|^{k-1}} = |z| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{k} = |z| \Rightarrow R = 1.$$

Хотя функция $\ln(1+z)$ определена на всей комплексной плоскости, кроме точки $z = -1$, ее ряд Тейлора (в окрестности нуля) сходится только при $|z| < 1$. Это объясняется тем, что точка $z = -1$ "не дает" кругу сходимости стать больше.

$$3. f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0.$$

$$f^{(n)}(z) = n! \cdot a_n \Rightarrow f^{(k)}(z) \equiv 0 \quad k > 0.$$

Поэтому

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^k.$$

Это тождество относительно z и p называют *формулой Тейлора для полинома* – мы получили еще одно представление полинома (см. формулу (3.1.2)).