

## Глава 9. ФУНКЦИИ ИЗ $\mathbb{R}$ В $\mathbb{R}$

### 9.1. Примеры

В этой главе будут рассмотрены функции, заданные на  $\mathbb{R}$  или на части  $\mathbb{R}$  (например, на промежутке) и принимающие значения в  $\mathbb{R}$ . Их часто называют "вещественные функции вещественной переменной". Такие функции получаются прежде всего из рассмотренных нами ранее аналитических функций путем сужения их на ту часть  $\mathbb{R}$ , где они принимают вещественные значения. При этом окажется, что логарифм, например, определен только на положительной полуоси, а синус и косинус, "как в школе", ограничены по модулю единицей.

Установим некоторые полезные свойства экспоненты и логарифма на вещественной оси.

1.  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \quad (9.1.1)$$

Из формулы (9.1.1) видно, что при  $x > 0$   $\exp(x) > x$  и, следовательно, экспонента на вещественной оси неограниченно возрастает. Этот факт записывают так

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Приведем точный смысл этого выражения: для любого положительного числа  $E$  можно указать такое число  $x_E$ , что при  $x > x_E$   $\exp(x) > E$ .

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

(для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать такое число  $x_\varepsilon$ , что при  $x < x_\varepsilon$   $\exp(x) < \varepsilon$ ).

Далее, из (9.1.1) следует, что при  $x > 0$

$$\exp(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{или} \quad \frac{x^n}{\exp(x)} < \frac{(n+1)!}{x}.$$

Зафиксируем в последнем неравенстве  $n$ . Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0.$$

Экспонента растет на  $+\infty$  быстрее, чем любая положительная степень ее операнда.

2.  $\ln: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Из возрастания экспоненты на положительной полуоси следует возрастание обратной ей функции – натурального логарифма. Действительно, пусть  $y_1 = \exp(x_1)$ ,  $y_2 = \exp(x_2)$ . Тогда  $x_1 = \ln(y_1)$ ,  $x_2 = \ln(y_2)$  и

$$\frac{\exp(x_2) - \exp(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0 \quad \text{т.е.} \quad \frac{y_2 - y_1}{\ln(y_2) - \ln(y_1)} > 0.$$

Из  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$  следует, что  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty$  – логарифм возрастает неограниченно.

Из  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$  следует, что  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$  и, наконец, при любом  $\alpha > 0$  имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^\alpha)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Логарифм растет на  $+\infty$  медленнее, чем любая положительная степень его операнда.

## 9.2. Оценивание вещественных корней вещественных функций

Сформулируем без доказательства два важных свойства функций  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Теорема Вейерштрасса.<sup>1</sup>

1. Множество значений непрерывной *на сегменте*, вещественной функции ограничено.
2. Среди значений непрерывной *на сегменте*, вещественной функции есть наибольшее и наименьшее (если  $Y$  – множество значений этой функции, то  $\sup(Y) \in Y$ ,  $\inf(Y) \in Y$ ).

Замечание. Обратите внимание на то, что здесь существенна не только *непрерывность* функции, но и ее задание *на сегменте*. Например, функция  $f(x) = 1/x$  непрерывна на *полуинтервале*  $]0, 1]$ , но не ограничена на нем, хотя ограничена на любом сегменте, целиком лежащем в  $]0, 1]$ . Функция,  $f(x) = x^2$  непрерывна и ограничена на  $]0, 1]$ , но среди ее значений нет наименьшего. Придумайте пример функции, непрерывной и ограниченной на  $]0, 1]$ , но не достигающей ни верхней, ни нижней грани множества своих значений.

Теорема Коши. Если вещественная функция непрерывна на *сегменте*, и множество ее значений  $Y$  содержит два различных числа  $y_1 < y_2$  (т.е. эта функция – не константа), то  $Y$  содержит и все "промежуточные" числа:  $[y_1, y_2] \in Y$ .

Замечания. 1. Эта теорема кажется геометрически очевидной: точка, движущаяся по непрерывному графику, не может при изменении ее ординаты от  $y_1$  до  $y_2$  миновать какую-нибудь промежуточную ординату. На самом деле этот факт – фундаментальное и довольно тонкое свойство множества  $\mathbb{R}$ .

Заметим также, что на комплексной плоскости множество значений непрерывной функции может иметь "дыры". Например, экспонента принимает все значения из  $\mathbb{C}$ , кроме нуля!

2. Теоремы Вейерштрасса и Коши часто формулируют в виде одного короткого утверждения: *непрерывная функция, действующая из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , отображает сегмент на сегмент*.

Отметим одно важное приложение теоремы Коши. Пусть  $f$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$  и  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Тогда множество значений  $f$  содержит нуль, т.е. найдется хотя бы одна такая точка  $c \in ]a, b[$ , что  $f(c) = 0$ . Эту точку называют корнем уравнения  $f(x) = 0$  или нулем функции  $f$ .

Поскольку условие  $f(a) \cdot f(b) < 0$  гарантирует (при непрерывности  $f$ ), что интервал  $]a, b[$  накрывает хотя бы один корень уравнения  $f(x) = 0$ , назовем этот интервал *оценкой* корня. Качественно этой оценки естественно считать длину интервала.

Процесс построения оценки корня уравнения с заданным качеством (процесс "решения" уравнения) состоит из двух этапов:

- 1) поиск какой-нибудь оценки (поиск интервала, гарантированно накрывающего корень) – этот этап, вообще говоря, неалгоритмизируем;
- 2) уточнение имеющейся оценки.

Рассмотрим один шаг известного алгоритма уточнения оценки корня вещественной непрерывной функции – алгоритма *бисекции* ("половинного деления").

Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Возьмем середину сегмента – точку  $x = \frac{a+b}{2}$  и вычислим  $f(x)$ .

Возможны три случая:

- 1)  $f(x) = 0$ ;
- 2)  $f(x) \cdot f(a) < 0$ ;
- 3)  $f(x) \cdot f(b) < 0$ .

В случае (1) мы получили не оценку корня, а его значение.

В случае (2) оценкой корня становится интервал  $]a, x[$ , в случае (3) – интервал  $]x, b[$ .

Таким образом, мы либо нашли корень, либо вдвое сократили длину интервала-оценки.

Повторяя бисекцию, теоретически можно получить оценку любого наперед заданного качества. Практически же предел уточнению оценки кладет "машинная арифметика" (см. Приложение).

Серьезное предупреждение. При машинном счете находить середину сегмента по формуле  $x = \frac{a+b}{2}$  нельзя: из-за вычислительных погрешностей точка может оказаться *вне сегмента*! Правильный результат дает формула  $x = a + \frac{b-a}{2}$ . Этот несложный пример подтверждает наш совет: пользователь не должен пытаться самостоятельно писать программы, реализующие вычислительные алгоритмы. Его удел – использование готовых библиотек.

## 9.3. Кусочно заданные функции

<sup>1</sup>Карл Теодор Вильгельм ВЕЙЕРШТРАСС (1815-1897) – немецкий математик, профессор Берлинского университета. Его учениками были многие известные математики из разных стран, в том числе С.В.Ковалевская.

Уже давно нашли широкое применение кусочно заданные функции, простейшим примером которых является *кусочно полиномиальная функция*. Задается она так.

1. Строится *сетка*, т.е. упорядоченный по возрастанию конечный набор попарно различных вещественных чисел

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

2. На каждом интервале  $J_k = ]x_{k-1}, x_k[$ ,  $k = 1, \dots, n$  задается полином  $f_k : J_k \rightarrow \mathbb{R}$ .

3. Задаются значения функции в узлах сетки  $f(x_0), \dots, f(x_n)$ .

Примеры.

$$1. \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{если } x < 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ 1 & \text{если } x > 0 \end{cases} \quad (\text{рис.9.1})^2.$$

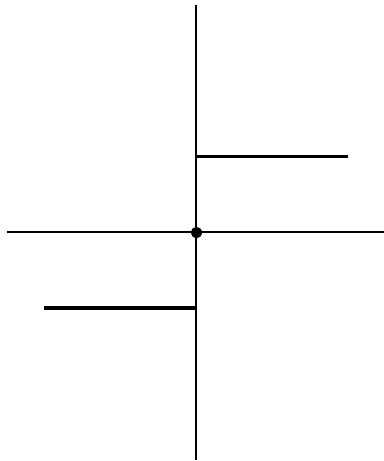


Рис.9.1

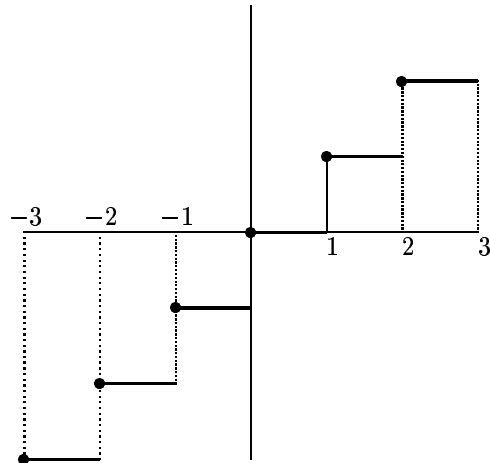


Рис.9.2

2.  $\operatorname{entier}(x)$  (на рис.9.2 приведен фрагмент ее графика).

Функции из примеров (1) и (2) называют обычно *кусочно постоянными*.

3.  $x - \operatorname{entier}(x)$  – "дробная часть числа" (на рис.9.3 приведен фрагмент ее графика – на каждом интервале функция задана полиномом первой степени).

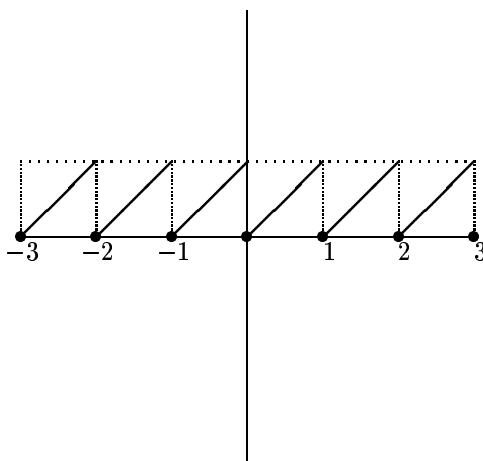


Рис.9.3

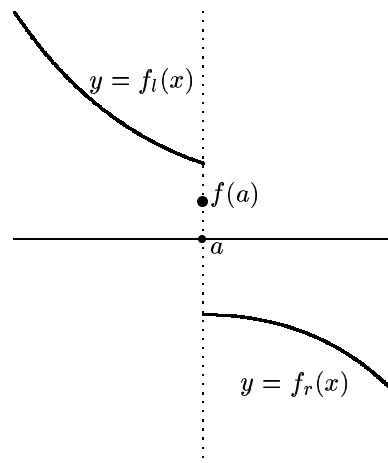


Рис.9.4

Рассмотрим теперь поведение кусочно полиномиальной функции в окрестности узла сетки (рис.9.4). Пусть этот узел  $x = a$  и

$$f(x) = \begin{cases} f_l(x) & \text{при } x < a \\ f_r(x) & \text{при } x > a, \end{cases}$$

где  $f_l$  и  $f_r$  – полиномы.

Воспользуемся тем, что полиномы  $f_l$  и  $f_r$  определены на всей оси, и вычислим  $f_l(a)$  и  $f_r(a)$ .

Таким образом, в точке  $a$  определены:

- 1)  $f_l(a)$  – вычисленное в точке  $a$  значение полинома  $f_l$ , задающего функцию  $f$  *левее* этой точки,
- 2)  $f(a)$  – значение функции  $f$  в точке  $a$ ,
- 3)  $f_r(a)$  – вычисленное в точке  $a$  значение полинома  $f_r$ , задающего функцию  $f$  *правее* этой точки.

Число  $f_l(a)$  называют *левым пределом функции  $f$  в точке  $a$* , число  $f_r(a)$  – *правым пределом функции  $f$  в точке  $a$* . Пишут

$$\lim_{x=a-} f(x) = f_l(a) \quad \text{или} \quad f(a-0) = f_l(a), \quad \text{или} \quad f(a-) = f_l(a).$$

$$\lim_{x=a+} f(x) = f_r(a) \quad \text{или} \quad f(a+0) = f_r(a), \quad \text{или} \quad f(a+) = f_r(a).$$

Число  $f(a+) - f(a-)$  называется *скачком* функции  $f$  в точке  $a$ .

Пример (см. рис.9.1).  $\text{sign}(0-) = -1$ ,  $\text{sign}(0+) = +1$ .

Скачок функции  $\text{sign}$  в нуле равен  $\text{sign}(0+) - \text{sign}(0-) = 2$ .

Замечания. 1. Если скачок функции в точке  $a$  равен нулю, т.е. левый и правый пределы равны между собой, мы будем считать эту функцию в точке  $a$  *непрерывной*, полагая  $f(a) = f(a+) = f(a-)$ . Тем самым мы исключаем из рассмотрения так называемые "устраняемые разрывы", считая, что если разрыв *можно* устранить, то его *следует* устранить. Эта точка зрения уже разъяснялась в п.4.5.

2. Если скачок функции в точке отличен от нуля, то значение функции в этой точке может совпадать с одним из ее односторонних пределов. Если  $f(a) = f(a+)$ , то говорят, что функция  $f$  *непрерывна в точке  $a$  справа*. Если же  $f(a) = f(a-)$ , то говорят, что функция  $f$  *непрерывна в точке  $a$  слева*.

Пример.  $\text{entier}(1-) = 0$ ,  $\text{entier}(1) = 1$ ,  $\text{entier}(1+) = 1$ . Поэтому функция  $\text{entier}$  непрерывна в точке  $x = 1$  справа. Точно так же она непрерывна справа в любой точке  $x \in \mathbb{Z}$ .

Очевидно, что непрерывность функции в точке равносильна ее непрерывности в этой точке справа и слева.

3. Если  $f$  определена в точке  $a$ , имеет в этой точке конечные односторонние пределы и ее скачок в этой точке отличен от нуля, то  $a$  называют точкой разрыва *первого рода* для функции  $f$ . Функция, все точки разрыва которой – первого рода, причем количество их на любой конечной части ее области определения конечно, называется *кусочно непрерывной*. Так, например,  $\text{sign}$  – кусочно непрерывная функция (имеет одну точку разрыва первого рода), функция  $\text{entier}$  также кусочно непрерывна (хотя количество ее точек разрыва первого рода и бесконечно, но на любой *конечной* части оси оно *конечно*).

4. Все понятия, введенные выше для *кусочно полиномиальных* функций, естественным образом распространяются на любые *кусочно аналитические* функции при условии, что каждая аналитическая функция  $f_k$  определена не только на интервале  $J_k$ , но и на его концах.

#### 9.4. Полиномиальные сплайны

Кусочно полиномиальные функции принято называть *полиномиальными сплайнами*<sup>3</sup>. Учитывая все возрастающую роль полиномиальных сплайнов в приложениях, рассмотрим кратко их основные конструкции.

*Порядком* полиномиального сплайна мы будем называть порядок образующих его полиномов, а полином  $f_k$ , задающий сплайн на интервале  $J_k = ]x_{k-1}, x_k[$ , –  $k$ -й *порцией* сплайна.

Простейший полиномиальный сплайн – сплайн *первого* порядка – кусочно постоянная функция. Он имеет, очевидно, разрывы первого рода в узлах сетки (см. рис.9.1 и рис.9.2).

Пример сплайна *второго* порядка, имеющего разрывы во всех узлах сетки, приведен на рис.9.3. Однако при построении сплайна второго порядка уже можно обеспечить его непрерывность. Такой сплайн задается таблицей его значений в узлах сетки.

$x$	$x_0$	$\dots$	$x_n$
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Запишем его  $k$ -ю порцию в виде

$$f_k(x) = a_k(x - x_{k-1}) + b_k.$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются из условий непрерывности в узлах:

$$f_k(x_{k-1}) = b_k = f(x_{k-1}); \quad f_k(x_k) = a_k(x_k - x_{k-1}) + b_k = f(x_k).$$

<sup>3</sup>Spline (англ.) – рейка (приспособление, которое применяли чертежники для проведения гладких кривых через заданные точки.

Отсюда

$$f_k(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \cdot (x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}).$$

Геометрическая интерпретация непрерывного сплайна второго порядка – ломаная, соединяющая точки  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$  (рис.9.5).

Производная непрерывного сплайна второго порядка не определена в узлах сетки.

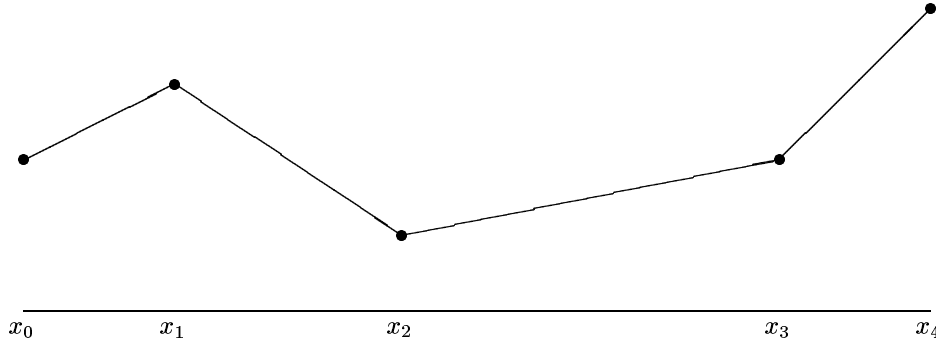


Рис.9.5

Сплайн *третьего* порядка может не только быть непрерывным, но и обладать непрерывной первой производной. Запишем его  $k$ -ю порцию в виде

$$f_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^2 + b_k(x - x_{k-1}) + c_k.$$

Фиксация значений порции сплайна на концах интервала даст два уравнения

$$f_k(x_{k-1}) = c_k = f(x_{k-1}), \quad (9.4.1)$$

$$f_k(x_k) = a_k(x_k - x_{k-1})^2 + b_k(x_k - x_{k-1}) + c_k = f(x_k). \quad (9.4.2)$$

Таких пар уравнений будет  $n$  (по числу порций сплайна). Потребовав непрерывности первой производной во внутренних узлах сетки ( $k = 1, \dots, n-1$ ), получим еще  $n-1$  уравнение

$$f'_k(x_k) = 2a_k(x_k - x_{k-1}) + b_k = b_{k+1} = f'_{k+1}(x_k). \quad (9.4.3)$$

Для определения  $3n$  параметров сплайна  $(a_k, b_k, c_k; \quad k = 1, \dots, n)$  мы получили  $2n + (n-1) = 3n-1$  уравнений – система неопределенная!

Подставив (9.4.1) в (9.4.2), получим

$$\begin{cases} a_k(x_k - x_{k-1})^2 + b_k(x_k - x_{k-1}) & = f(x_k) - f(x_{k-1}) \\ 2a_k(x_k - x_{k-1}) + b_k & = b_{k+1} \end{cases}.$$

Переписав эту систему иначе

$$\begin{cases} a_k & = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^2} - \frac{b_k}{x_k - x_{k-1}} \\ b_{k+1} & = 2a_k(x_k - x_{k-1}) + b_k \end{cases} \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

получим рекуррентные формулы для определения по *заданному произвольно*  $b_1$  остальных параметров сплайна:

$$b_1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \dots$$

Произвол в выборе  $b_1$  может быть использован как угодно (как и всякий другой произвол). На рис.9.6 изображен сплайн третьего порядка, построенный при  $b_1 = 0.3$ .

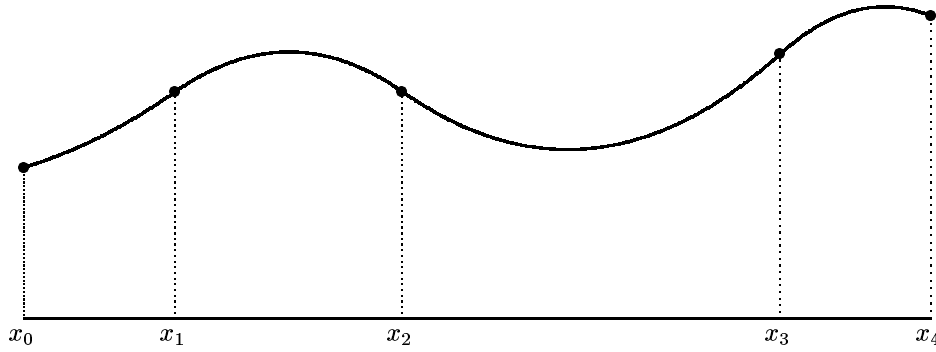


Рис.9.6

Рассмотрим еще нашедший наибольшее применение полиномиальный сплайн *четвертого* порядка с двумя непрерывными производными. Его  $k$ -я порция имеет вид

$$f_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^3 + b_k(x - x_{k-1})^2 + c_k(x - x_{k-1}) + d_k.$$

Подлежит определению  $4n$  параметров сплайна  $(a_k, b_k, c_k, d_k; \quad k = 1, \dots, n)$ . Фиксируя значения порции сплайна на концах интервала, получим для каждой порции два уравнения

$$f_k(x_{k-1}) = d_k = f(x_{k-1}), \quad (9.4.4)$$

$$f_k(x_k) = a_k(x_k - x_{k-1})^3 + b_k(x_k - x_{k-1})^2 + c_k(x_k - x_{k-1}) + d_k = f(x_k). \quad (9.4.5)$$

Непрерывность первой производной во внутренних узлах сетки  $(k = 1, \dots, n - 1)$  дает  $n - 1$  уравнение

$$f'_k(x_k) = 3a_k(x_k - x_{k-1})^2 + b_k(x_k - x_{k-1}) + c_k = c_{k+1} = f'_{k+1}(x_k). \quad (9.4.6)$$

И, наконец, непрерывность второй производной в тех же узлах дает еще  $n - 1$  уравнение

$$f''_k(x_k) = 6a_k(x_k - x_{k-1}) + 2b_k = 2b_{k+1} = f''_{k+1}(x_k). \quad (9.4.7)$$

Всего, таким образом, для определения  $4n$  параметров сплайна имеем  $2n + 2(n - 1) = 4n - 2$  уравнений (2 параметра задаются произвольно). Подставив (9.4.4) в (9.4.5) получим после несложных преобразований систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_k &= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^3} - \frac{b_k}{(x_k - x_{k-1})^2} - \frac{c_k}{x_k - x_{k-1}} \\ c_{k+1} &= 3a_k(x_k - x_{k+1})^2 + 2b_k(x_k - x_{k-1}) + c_k \\ b_{k+1} &= 3a_k(x_k - x_{k+1}) + b_k \end{cases}, \quad (k = 1, \dots, n - 1)$$

которая позволяет по заданным *произвольно*  $b_1, c_1$  определить остальные параметры сплайна.

$$c_1, b_1 \rightarrow a_1 \rightarrow c_2, b_2 \rightarrow \dots$$