

Глава 1. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Высказывания. Логические операции

Предложение, содержащее истинное или ложное утверждение, мы будем называть *высказыванием*.

Примеры. 1. Тигр – млекопитающее.

2. "А" – первая буква русского алфавита.

3. В колоде для преферанса 52 карты.

4. $2+3=6$.

Первые два высказывания истинны, вторые два – ложны.

Следующие предложения высказываниями не являются:

Простите пехоте, что так неразумна бывает она.

Социалистическая перспектива.

Розовое платье красивее, чем голубое.

Первые два предложения не содержат утверждений; истинность утверждения, содержащегося в третьем предложении, зависит от вкуса.

Определение. Пусть **A** – высказывание. *Отрицанием* высказывания **A** называется высказывание "неверно, что **A**" (или "не **A**"), которое ложно, если **A** истинно, и истинно, если **A** ложно. При записи вместо "не **A**" обычно употребляют знак $\neg A$.

Это определение коротко записывается в виде так называемой *таблицы истинности* (здесь **И** обозначает истину, **Л** – ложь):

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

Определение. Пусть **A**, **B** – высказывания. *Конъюнкцией* этих высказываний называется высказывание "**A** и **B**" (пишут $A \& B$ или $A \wedge B$), которое задается следующей таблицей истинности:

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Примеры. 1. Высказывание $(B \text{ октябре } 31 \text{ день}) \wedge (\pi > e)$ истинно, ибо истинны оба операнда конъюнкции.

2. Высказывание $(\text{Стрелка компаса всегда указывает на запад}) \wedge (3 \cdot 3 = 9)$ ложно, так как ложен первый операнд конъюнкции.

Определение. Пусть **A**, **B** – высказывания. *Дизъюнкцией* этих высказываний называется высказывание "**A** или **B**" (пишут $A \vee B$), которое задается следующей таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Примеры. 1. Высказывание $(B \text{ октябре } 31 \text{ день}) \vee (\text{Стрелка компаса всегда указывает на запад})$ истинно, ибо первый операнд дизъюнкции истинный.

2. Высказывание $(1900 \text{ год} - \text{високосный}) \vee (2 \cdot 2 = 5)$ ложно, так как ложны оба операнда дизъюнкции.

Замечания. 1. Обратите внимание на то, что союз "или" не имеет в математике разделительного смысла "или-или", обычного для употребления этого союза в русском языке.

2. Для запоминания удобны следующие описания: конъюнкция истинна только при истинности обоих ее операндов; дизъюнкция ложна только при ложности обоих ее операндов.

Определение. Пусть **A**, **B** – высказывания. *Импликацией* называется высказывание "если **A**, то **B**" (пишут $A \Rightarrow B$), которое задается следующей таблицей истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Примеры. 1. Высказывание $(\pi > e) \Rightarrow (2 \cdot 2 = 3)$ ложно.

2. Высказывание $(2 \cdot 2 = 5) \Rightarrow (2 \cdot 2 = 3)$ истинно.

Замечания. 1. Как видно из второго примера, значение союза "если...то" в математике не всегда совпадает с его значением в русском языке. Поэтому мы советуем не пытаться интерпретировать импликацию на содержательном уровне, а запомнить таблицу истинности и пользоваться ею.

2. В отличие от конъюнкции и дизъюнкции импликация не симметрична: $B \Rightarrow A$ не то же самое, что $A \Rightarrow B$.

Определение. Пусть A, B – высказывания. *Эквивалентией* называется высказывание " A равносильно B " (пишут $A \Leftrightarrow B$), которое задается следующей таблицей истинности:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Примеры. 1. $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$.

2. $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$.

3. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$.

Проверьте истинность этих высказываний, построив таблицы истинности.

1.2 Множества

Множество – понятие первичное, неопределяемое. Синонимами слова *множество* являются: *семейство*, *класс*, *стадо*, а также ряд других слов.

Множество состоит из элементов. Описание множества должно быть настолько подробным, чтобы практически о любом предмете (вещи) можно было сказать, является этот предмет (эта вещь) элементом данного множества или нет.

Мы будем обозначать множества большими буквами латинского алфавита, а их элементы – малыми. Если a – элемент множества A (говорят также " a принадлежит множеству A "), будем писать $a \in A$; если a не является элементом множества A (a не принадлежит множеству A), будем писать $a \notin A$.

Часто встречающиеся числовые множества имеют стандартные обозначения:

\mathbb{N} – множество натуральных чисел;

\mathbb{Z} – множество целых чисел;

\mathbb{R} – множество вещественных чисел.

Очевидна истинность следующих высказываний: $2 \in \mathbb{N}$, $3.62 \notin \mathbb{N}$, $3.62 \in \mathbb{R}$.

Если множество состоит из конечного (и не слишком большого) количества элементов, проще всего задать это множество, просто перечислив все его элементы. Например, запись

$$X = \{-1, 0, 1\}$$

означает, что множество состоит из трех элементов: (-1) , (0) , (1) . Отметим, что порядок перечисления элементов множества не играет роли. Так, например,

$$\{-1, 0, 1\} = \{1, -1, 0\}.$$

Если пишут $A = B$, то имеют в виду, что A и B – два имени одного и того же множества (иначе, – слева и справа от знака равенства стоят два экземпляра одного и того же множества).

Условимся считать все элементы множества различными (во множестве не может быть одинаковых элементов). Например, если положить в кошелек пять только что отпечатанных сторублевок, то элементами множества следует считать не сторублевки, а *пронумерованные* сторублевки, так как одна купюра отличается от

другой только своим номером. Несколько рублевых монет образуют множество только при условии, что они различаются годом выпуска. А вот несколько десятикопеечных монет (на них год выпуска отсутствует) множества не образуют.

Если множество конечно, но содержит очень много элементов, то целесообразно вместо перечисления этих элементов сформулировать характеристическое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только элементы этого множества. Запись

$$A = \{a | \mathcal{P}(a)\}$$

читается так: "А состоит из всех тех и только тех элементов, которые обладают свойством \mathcal{P} (для каждого из которых высказывание $\mathcal{P}(a)$ истинно)". Например, "А – множество всех натуральных чисел, квадрат которых меньше миллиарда" (попробуйте задать это множество перечислением его элементов!).

Очевидно, что задать множество с бесконечным количеством элементов можно только указанием характеристического свойства этих элементов. Так, множеством четных чисел называют множество целых чисел, делящихся на 2 без остатка, множеством правильных дробей называют множество обыкновенных дробей, у которых модуль числителя строго меньше модуля знаменателя, и т.д.

Замечания. 1. Множество удобно представлять себе как мешок, в который свалены составляющие это множество элементы. Мы намеренно использовали слово "свалены", чтобы еще раз подчеркнуть неупорядоченность элементов множества.

2. Не следует отождествлять близкие по смыслу слова русского языка "много" и "множество". Во множестве (математическом) может быть мало элементов, может быть один элемент (есть даже термин "одноэлементное множество") и, наконец, может вообще не быть ни одного элемента (*пустое множество*). Поэтому часто употребляемое "школьное" выражение "уравнение имеет множество решений" бессодержательно: у уравнения всегда есть множество решений (даже если у него нет ни одного решения).

3. Пустое множество принято обозначать символом \emptyset .

4. Если множество задается характеристическим свойством его элементов, то это свойство должно быть проверяемым. Вряд ли можно говорить о множестве студентов-спортсменов, так как существуют различные точки зрения на то, следует ли считать спортсменом студента, играющего на лекции в бридж.

Следует вообще избегать обсуждения несформулированных проблем. Так, в середине прошлого века у *философов* была модная тема дискуссий: "Может ли машина мыслить?". При этом не определялись ни понятие "машина", ни понятие "мыслить". *Математик* Тьюринг¹ "проблему" закрыл, опубликовав статью под названием "Может ли машина мыслить?", в которой *определил понятия* "машина" и "мыслить" и *доказал*, что машина (в смысле Тьюринга) может мыслить (в смысле Тьюринга). Рекомендуем прочесть эту весьма любопытную работу (русский перевод: А. Тьюринг. Может ли машина мыслить, Физматгиз, М., 1960)

1.3. Части множества. Операции над множествами

По-видимому, нет необходимости объяснять, что такое часть множества, если само множество уже задано. Отметим только, что иногда вместо понятных слов "часть множества" употребляют менее понятный синоним "подмножество".

Например, множество четных чисел есть часть множества целых чисел (подмножество множества целых чисел). Если множество A является частью множества B , то пишут $A \subset B$. При этом не исключается, что $A = B$, т.е. всякое множество считается *по определению* своей частью. Очевидно, что

$$(A \subset B) \bigwedge (B \subset A) \iff A = B.$$

Мы будем считать пустое множество *по определению* частью любого множества. Это соглашение неизбежно, так как утверждение, что \emptyset не является частью X , означало бы, что во множестве \emptyset (пустом) есть элемент, не содержащийся во множестве X !

Рассмотрим некоторые операции над множествами.

Определение. *Пересечением* множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество, состоящее из всех элементов, входящих и в A , и в B (т.е. их максимальная общая часть). Утверждение $A \cap B = \emptyset$ читается "множества A и B не пересекаются". Из определения очевидно, что для любых множеств A, B, C

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cap A = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Определение. *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, входящих хотя бы в одно из объединяемых множеств. Если объединяемые множества A и B представлять себе в виде

¹Алан Матисон ТЬЮРИНГ (1912-1954) – английский инженер и математик, член Лондонского королевского общества. Возглавлял работу по созданию вычислительных машин в Национальной физической лаборатории в Теддингтоне. Математические работы Тьюринга в основном посвящены математической логике и вычислительным машинам.

заполненных их элементами мешков, то объединение получается так: берут пустой мешок C , ссыпают в него все содержимое мешков A и B , а затем удаляют дубликаты элементов (если таковые найдутся). Пишут $C = A \cup B$. Из определения очевидно, что для любых множеств A, B, C

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cup A = A; \quad A \cap \emptyset = A; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Графическое изображение сказанного выше называется диаграммой Венна² (рис.1.1). На этой диаграмме одно из исходных множеств заштриховано горизонтально, другое – вертикально. Пересечение (общая часть) несет на себе обе штриховки, объединение – хотя бы одну.

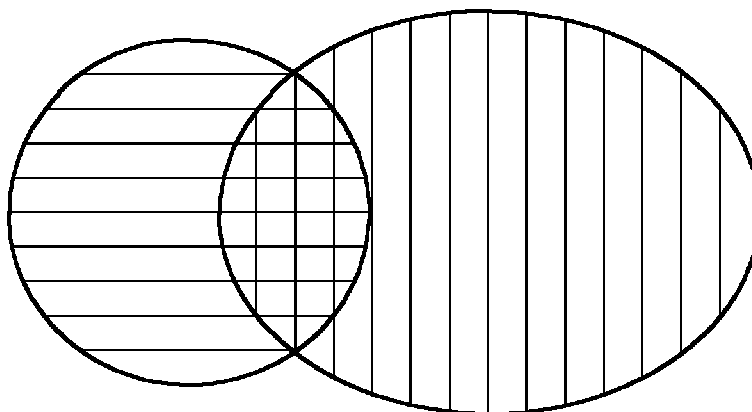


Рис.1.1

Несколько менее очевидны *дистрибутивные* свойства пересечения и объединения множеств

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Проверьте эти свойства на диаграмме Венна (рис.1.2):

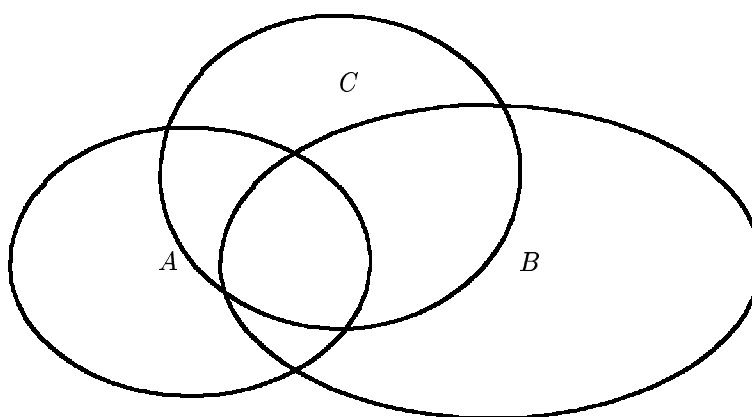


Рис.1.2

Определение. Разностью множеств A и B (обозначение $A \setminus B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов множества A , которые не входят в множество B .

²Джон ВЕНН (1834-1923) – английский логик и математик.

Для любых множеств A и B $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$. В частности, если $A \cap B = \emptyset$, то $A \setminus B = A$.

Определение. *Прямым произведением* непустых множеств A и B (обозначение $A \times B$) называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар, первый элемент которых берется из A , а второй – из B .

Замечания. 1. Из определения очевидно, что $A \times B \neq B \times A$, если $A \neq B$.

2. Вместо $A \times A$ обычно пишут A^2 и вообще, $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$.

n сомножителей

3. Прямое произведение множеств называют также их *декартовым³ произведением*.

1.4. Функция, отображение, оператор

Считая понятия *функция, отображение, оператор* первичными, опишем правила их использования.

Пусть X и Y – произвольные непустые множества. Если каждому элементу из X поставлен в соответствие *ровно один* элемент из Y , мы будем говорить:

– на множестве X задана *функция со значениями в Y* , или

– задано *отображение X в Y* , или

– задан *оператор, действующий из X в Y* .

Таким образом, слова *функция, отображение, оператор* мы будем считать синонимами⁴.

Если имя функции (отображения, оператора) есть f , то пишут

$$f: X \rightarrow Y.$$

Элемент $y \in Y$ (*единственный*), который функция f ставит в соответствие элементу $x \in X$, называют *значением функции f в точке $x \in X$* или *образом точки $x \in X$ при отображении f* . Элемент $x \in X$ называют *прообразом точки $y \in Y$ при отображении f* . Пишут $y = f(x)$. Договоримся считать, что на наших рисунках прообраз соединяется с образом стрелкой, направленной от прообраза к образу (рис.1.3).

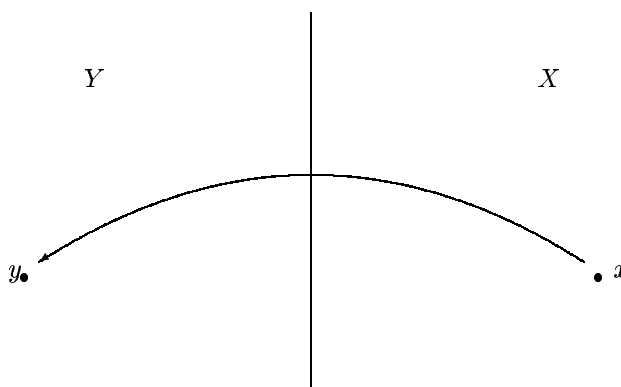


Рис.1.3

Серьезное предупреждение. Обращаем внимание читателя на то, что функция (отображение, оператор) это тройка (X, Y, f) , т.е. всякий раз, когда употребляется одно из слов "функция", "отображение", "оператор", должны быть названы множество X (область определения функции), множество Y (множество, в котором лежат значения функции⁵) и правило f , позволяющее для каждого $x \in X$ найти соответствующий ему *единственный* $y \in Y$.

Например, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y = f(x) = x^2$.

Отметим часто допускаемую вольность: говорят о функции $\sin(x)$, хотя в точном понимании $\sin(x)$ не функция, а значение функции \sin в точке x . Мы настоятельно рекомендуем всегда проводить различие между функцией и ее значением в точке.

Терминологическое замечание. В физике употребляется понятие "величина" (то, что можно измерить или вычислить, например, масса, температура и т.д.). В математике аналогом этого понятия служит *переменная*⁶. Объявляя какую-нибудь букву переменной, мы одновременно должны указать некоторое непустое множество,

³Рене ДЕКАРТ (1596-1650) – французский философ, математик, физик и физиолог. Впервые ввел понятия переменной и функции, сформулировал основную теорему алгебры, создал метод координат.

⁴Иногда между этими словами проводят различие. Например, называют оператором только отображение множества в себя.

⁵В этом контексте Y не есть множество значений функции f !

⁶Переменная в математике – имя существительное.

элементы которого могут в дальнейшем замещать эту букву. Так, например, если n – целая числовая переменная ($n \in \mathbb{Z}$), то в выражении $n^2 + 4$ можно вместо n подставлять любое целое число. Если p и q – логические переменные, то в выражении $p \vee q$ можно вместо них подставлять либо **И** (истина), либо **Л** (ложь).

Если x – переменная с множеством значений X , y – переменная с множеством значений Y , $f : X \rightarrow Y$ – функция, то в выражении $y = f(x)$ переменную x часто называют *независимой*, а переменную y – *зависимой*. В нашем курсе эти термины не используются.

1.5. Композиция функций

Рассмотрим такую ситуацию (рис.1.4):

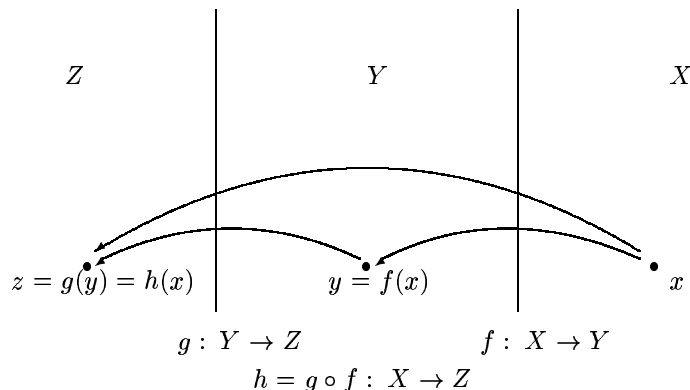


Рис.1.4

Заданы функции $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$. Поставим в соответствие каждому элементу $x \in X$ *ровно один* элемент $z \in Z$ по следующему правилу:

- 1) по заданному $x \in X$ найти соответствующий ему $y = f(x) \in Y$;
- 2) по полученному $y \in Y$ найти соответствующий ему $z = g(y) \in Z$.

Таким образом, оказывается построенной новая функция $h : X \rightarrow Z$. Ее называют *композицией* (иногда – *суперпозицией*) функций f и g . Пишут $h = g \circ f$ (обратите внимание на порядок компонент!). Говорят также "сложная функция", но мы не советуем использовать этот термин.

Итак,

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = h(x).$$

Если изображать функцию в виде "черного ящика" со входом x , выходом y и именем f (рис. 1.5),

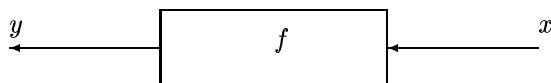


Рис.1.5

то композиция функций представится последовательным соединением компонент (рис. 1.6).

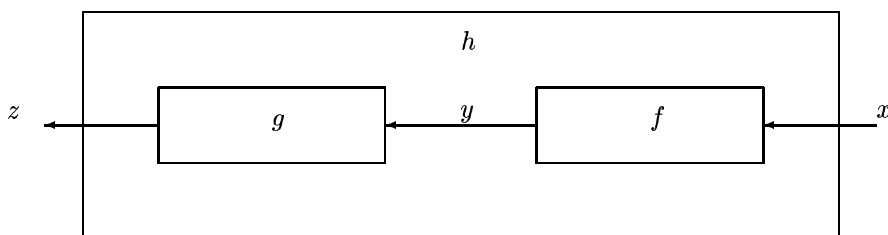


Рис.1.6