

## Глава 6. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

### 6.1. Определение. Примеры

Рассмотрим две последовательности:

$$1) f_n = 2n + 3i/n;$$

$$2) g_1 = 1; g_2 = 1; \text{ при } n > 2 \quad g_n = g_{n-1} + g_{n-2}.$$

В первом случае значение последовательности с любым номером можно вычислить, не вычисляя ее значения с предшествующими номерами. Во втором – для вычисления, например,  $g_6$ , придется найти  $g_3, g_4, g_5$ :

$$g_3 = g_2 + g_1 = 2, g_4 = g_3 + g_2 = 3, g_5 = g_4 + g_3 = 5 \text{ и, наконец, } g_6 = g_5 + g_4 = 8.$$

Будем говорить, что последовательность  $(f_n)$  задана *явно*, а последовательность  $(g_n)$  – *неявно*. Иногда (к сожалению, редко) удастся превратить неявное задание последовательности в явное. Напомним два примера из школьного курса:

$$u_0 = a \neq 0; \text{ при } n > 0 \quad u_n = q \cdot u_{n-1} \quad (q \neq 0) \text{ – геометрическая прогрессия.}$$

Известно, что  $u_n = a \cdot q^n$  для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$v_0 = a \neq 0; \text{ при } n > 0 \quad v_n = q + v_{n-1} \quad (q \neq 0) \text{ – арифметическая прогрессия.}$$

Известно, что  $v_n = a + q \cdot n$  для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$

Пусть теперь *явно* задана последовательность  $(a_n)$ . Определим *неявно* новую последовательность  $(A_n)$  так:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= A_1 + a_2 = a_1 + a_2, \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &= A_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Такую *пару последовательностей* называют *числовым рядом*. При этом *явно заданная* последовательность  $(a_n)$  называется *последовательность членов ряда*, а *неявно заданная* последовательность  $(A_n)$  – *последовательность частных сумм ряда*. Мы будем обозначать последовательности членов ряда малыми латинскими буквами, а последовательности частных сумм – соответствующими большими.

**Определение.** Если последовательность частных сумм ряда сходится (имеет предел), то говорят, что *ряд сходится*, а этот предел (число) называют *суммой ряда*.

$$\text{Если } \lim A_n = A, \text{ то пишут } a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A.$$

Если  $\lim A_n$  не существует, то говорят, что *ряд расходится*.

**Замечания.** 1. Символы  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  по определению обозначают сумму сходящегося ряда, т.е. число. Однако по традиции этими символами обозначают и сам ряд (даже в случае его расходимости). Можно встретить, например, утверждение: "ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  расходится".

2. Если изменить значения последовательности членов ряда для  $k$  номеров, взяв  $a'_{n_1}$  вместо  $a_{n_1}$ ,  $a'_{n_2}$  вместо  $a_{n_2}, \dots, a'_{n_k}$  вместо  $a_{n_k}$  (номера идут в порядке возрастания), то, начиная с номера  $n_k$  для частных сумм исходного ряда –  $A_n$  и измененного –  $A'_n$  будет выполняться условие

$$A'_n - A_n = (a'_{n_1} - a_{n_1}) + \dots + (a'_{n_k} - a_{n_k}), \quad n \geq n_k.$$

Таким образом, эти частные суммы отличаются на фиксированное число, и либо оба ряда – исходный и измененный – сходятся, либо оба расходятся. Более того, если оба ряда сходятся, то их суммы отличаются на то же число:

$$A' - A = (a'_{n_1} - a_{n_1}) + \dots + (a'_{n_k} - a_{n_k}).$$

Следовательно, при решении вопроса о сходимости ряда можно не обращать внимания на значения последовательности его членов для любого *конечного* числа номеров. В частности, если некоторое свойство имеет место *почти для всех номеров* (т.е. за исключением конечного их числа), то при решении вопроса о сходимости можно считать, что оно выполнено *для всех номеров*. Иногда этот прием существенно упрощает рассуждения.

Рассмотрим три примера.

$$1. f_n = a \cdot q^n, \quad (a \neq 0, q \neq 0, n = 0, 1, \dots). \quad F_n = a + a \cdot q + \dots + a \cdot q^n.$$

Если  $q = 1$ , то  $F_n = a \cdot n$ . Если же  $q \neq 1$ , то

$$(1 - q) \cdot F_n = F_n - q \cdot F_n = a \cdot (1 - q^{n+1}) \implies F_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^{n+1}.$$

Если  $|q| < 1$ , то  $\lim q^{n+1} = 0$  и  $F = \lim F_n = \frac{a}{1 - q}$ . Если  $|q| \geq 1$ , то  $\lim F_n$  не существует (ряд расходится). При  $|q| > 1$  это очевидно, так как  $(F_n)$  не ограничена. Случай  $|q| = 1$  будет рассмотрен ниже.

Итак,  $\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q}$  при  $|q| < 1$ .

$$2. g_n = a + n \cdot q, \quad (q \neq 0, n = 0, 1, \dots). \quad G_n = (n + 1) \cdot a + \frac{n(n + 1)}{2} \cdot q$$

$(G_n)$  не ограничена и, следовательно, предела не имеет. Ряд расходится.

$$3. h_n = (-1)^n, \quad n = 0, 1, \dots; H_n = \begin{cases} 1 & \text{при четном } n \\ 0 & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

$(H_n)$  – периодическая последовательность (период равен двум) и, следовательно, предела не имеет. Ряд расходится.

В этих примерах мы смогли ответить на вопрос о сходимости ряда "по определению", так как нам удалось получить явное выражение для последовательностей частных сумм.

Сформулируем две основные задачи теории числовых рядов:

1) по известным свойствам  $(a_n)$  – последовательности членов ряда – решить вопрос о сходимости  $(A_n)$  – последовательности частных сумм этого ряда (*не находя явного выражения для последовательности частных сумм*).

2. если ряд сходится, то вычислить его сумму, т.е.  $\lim A_n$ .

Теоремы, позволяющие решить первую задачу, называют обычно *признаками сходимости* рядов.

Теорема (признак расходимости ряда). Если неверно, что  $\lim a_n = 0$ , то ряд расходится.

Доказательство. Предположим, что ряд сходится, т.е. существует  $\lim A_n = A$ .

Так как  $a_n = A_n - A_{n-1}$ , то по теореме о пределе суммы

$$\lim a_n = \lim(A_n - A_{n-1}) = \lim A_n - \lim A_{n-1} = A - A = 0,$$

что противоречит условию.

Замечание. Из этой теоремы следует, в частности, расходимость ряда в примере 1 при  $|q| = 1$ .

Приведем еще несколько утверждений, полезных при исследовании рядов. Они являются очевидными переформулировками теорем 2, 3 и 6 о пределах последовательностей (п. 5.2).

1. Если ряды  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходятся, и их суммы равны  $A$  и  $B$  соответственно, то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ), причем его сумма равна  $\alpha A + \beta B$ .

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(A) \wedge \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(A) \right).$$

## 6.2. Положительные ряды

Определение. Если значения последовательности членов ряда – вещественные положительные числа, то ряд называется *положительным*.

Последовательность частных сумм положительного ряда возрастает, так как при  $a_n > 0$   $A_n = A_{n-1} + a_n > A_{n-1}$ . Следовательно, либо она не ограничена, либо (теорема из п. 5.2) имеет предел.

Определение. Если для всех номеров  $0 < a_n \leq b_n$ , то говорят, что последовательность  $(a_n)$  *мажорируется* последовательностью  $b_n$ . Можно также говорить, что последовательность  $(b_n)$  *больше* последовательности  $(a_n)$  (последовательность  $(a_n)$  *меньше* последовательности  $(b_n)$ ). Те же термины применяются и по отношению к положительным рядам.

Теорема (признак сравнения положительных рядов). Из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего. Из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего.

Доказательство.

$$\text{Пусть } 0 < a_n \leq b_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B. \quad \text{Тогда } A_n = a_1 + \dots + a_n \leq b_1 + \dots + b_n < B,$$

т.е. возрастающая последовательность  $(A_n)$  ограничена и, следовательно, имеет предел.

Второе утверждение доказывается от противного.

Теорема (предельная форма признака сравнения). Если существует предел  $\lim \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = L$ , то:

- 1) при  $L \neq 0$  либо оба ряда сходятся, либо оба расходятся;
- 2) при  $L = 0$  из сходимости  $(B_n)$  следует сходимость  $(A_n)$ , а из расходимости  $(A_n)$  – расходимость  $(B_n)$ .

Доказательство. 1) По определению предела последовательности в любой окрестности точки  $L$  лежат значения последовательности *почти для всех номеров*. Положим  $\varepsilon = L/2$ . Тогда, учитывая замечание 2 из п.6.1, можно считать, что *для всех номеров*

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2} \quad \text{или} \quad \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}, \quad \text{или} \quad a_n < \frac{3L}{2} b_n, \quad b_n < \frac{2}{L} a_n.$$

Пусть  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ . Тогда

$$A_n = a_1 + \dots + a_n < \frac{3L}{2} (b_1 + \dots + b_n) < \frac{3LB}{2},$$

т.е. возрастающая последовательность  $(A_n)$  ограничена и, следовательно, имеет предел.

Если же  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$ , то

$$B_n = b_1 + \dots + b_n < \frac{2}{L} (a_1 + \dots + a_n) < \frac{2A}{L}$$

т.е. возрастающая последовательность  $(B_n)$  ограничена и, следовательно, имеет предел.

- 2) Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность нуля. Для всех номеров (см. замечание 2 из п.6.1) имеем

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \implies a_n < \varepsilon b_n.$$

Пусть  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ . Тогда  $A_n = a_1 + \dots + a_n < \varepsilon (b_1 + \dots + b_n) < \varepsilon B$ ,

т.е. возрастающая последовательность  $(A_n)$  ограничена и, следовательно, имеет предел.

Вторая часть утверждения 2) доказывается от противного.

Пользоваться признаками сравнения можно, имея эталонные положительные ряды (как сходящиеся, так и расходящиеся). Примерами таких эталонов являются уже известные:

- 1) семейство, порожденное арифметическими прогрессиями  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a + nq)$ ,  $a > 0, q > 0$  (все ряды этого семейства расходятся);
- 2) семейство, порожденное геометрическими прогрессиями  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a \cdot q^n)$ ,  $a > 0, q > 0$  (ряды сходятся при  $q < 1$  и расходятся при  $q \geq 1$ ).

Рассмотрим еще семейство положительных рядов  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ . – (ряды Дирихле<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>Пьер Густав Лежен ДИРИХЛЕ (1805-1859) – немецкий математик.

Пусть  $p > 1$ . Сравним два ряда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^p} + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \left( \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{15^p} \right) + \dots; \\ & \frac{1}{1^p} + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} \right) + \left( \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} \right) + \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что второй ряд *больше*. Перепишем его в виде

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \frac{1}{(2^{p-1})^3} + \dots$$

Мы получили ряд, порожденный геометрической прогрессией со знаменателем  $q = 1/2^{p-1} < 1$  ( $p > 1$ ), который сходится, Поэтому сходится и *меньший* ряд Дирихле.

Пусть теперь  $p \leq 1$ . Сравним два ряда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \left( \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \right) + \left( \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} \right) + \left( \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{16^p} \right) + \dots; \\ & \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{2}{4^p} + \frac{4}{8^p} + \frac{8}{16^p} + \dots = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \frac{1}{(2^{p-1})^3} + \frac{1}{(2^{p-1})^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Второй ряд меньше первого и расходится, так как порожден геометрической прогрессией, знаменатель которой  $q = 1/2^{p-1} \geq 1$  ( $p \leq 1$ ). Следовательно, расходится и *большой* ряд Дирихле.

Итак, ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ . В частности, расходится так называемый *гармонический* ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ .

**Замечание.** При исследовании ряда Дирихле мы "расставляли скобки", т.е. заменяли группы соседних по номерам слагаемых их суммами. Можно показать, что такая операция преобразует *сходящийся* ряд в *сходящийся* ряд с той же суммой, а *расходящийся положительный* (!) ряд – в *расходящийся*.

Для произвольного числового ряда эта операция, вообще говоря, недопустима. Возьмем, например, *расходящийся* ряд (см. пример 3 п.6.1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

и расставим в нем скобки двумя способами:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0; \quad 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1.$$

Результат не нуждается в комментариях.

### 6.3. Вещественный ряд с чередованием знаков

**Определение.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots,$$

где  $a_n > 0$  для всех номеров, называется *рядом с чередованием знаков*.

**Теорема** (признак Лейбница<sup>2</sup>). Если

$$1) \lim a_n = 0; \quad 2) a_{n+1} < a_n \text{ для всех } n,$$

то ряд с чередованием знаков сходится, причем  $|A - A_n| < a_{n+1}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность *четных* частных сумм  $(A_{2n})$ :

$$A_{2n} = (a_1 - a_2) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = A_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

<sup>2</sup>Готфрид Вильгельм ЛЕЙБНИЦ (1646-1716) – немецкий математик, физик и философ. Один из основоположников математического анализа, организатор и первый президент Берлинской АН. Член Лондонского Королевского общества и Парижской АН.

По условию (2)  $a_{2n-1} - a_{2n} > 0$  т.е.  $A_{2n} > A_{2n-2}$ . Далее,

$$A_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

По условию (2) все скобки положительны, т.е.  $A_{2n} < a_1$ .

Возрастающая ограниченная сверху последовательность  $(A_{2n})$  имеет предел. Обозначим  $A = \lim A_{2n}$ . По условию (1)  $\lim a_{2n+1} = 0$ . Поэтому

$$\lim A_{2n+1} = \lim(A_{2n} + a_{2n+1}) = \lim A_{2n} + \lim a_{2n+1} = \lim A_{2n} = A.$$

Итак,  $\lim A_{2n} = \lim A_{2n+1} = A$ . Это значит, что в любой окрестности числа  $A$  лежат почти все частные суммы (как четные, так и нечетные), т.е.  $\lim A_n = A$ , и первое утверждение теоремы доказано. Для доказательства второго заметим, что

$$A - A_n = (-1)^{n+2}a_{n+1} + (-1)^{n+3}a_{n+2} + \dots = (-1)^{n+2}(a_{n+1} - a_{n+2} + \dots).$$

Рассмотрим ряд с чередованием знаков

$$a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots$$

Все его частные суммы положительны, ибо

$$(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots + (a_{n+2m-1} - a_{n+2m}) > 0,$$

$$(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots + (a_{n+2m-1} - a_{n+2m}) + a_{n+2m+1} > 0$$

и меньше, чем  $a_{n+1}$ :

$$a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots - a_{n+2m} < a_{n+1},$$

$$a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots - (a_{n+2m} - a_{n+2m+1}) < a_{n+1}$$

Следовательно,  $|A - A_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots < a_{n+1}$ .

Пример. Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  сходится, так как  $\lim \frac{1}{n} = 0$  и  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ .

#### 6.4. Исследование сходимости произвольных числовых рядов

Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  не является ни положительным, ни рядом с чередованием знаков, то рекомендуется следующий путь исследования его на сходимость.

1. Применить признак расходимости, т.е. попытаться вычислить предел  $\lim a_n$ . Если этот предел не существует, или существует, но не равен нулю, то вопрос решен – ряд расходится.

2. Если  $\lim a_n = 0$ , то признак расходимости не работает. В этом случае следует рассмотреть *положительный* ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ , к которому можно применить теорему сравнения.

Теорема. Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  сходится, то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  (в этом случае говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  *абсолютно сходится*).

Доказательство.

1. Пусть сначала последовательность  $(a_n)$  – вещественная и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  сходится. Рассмотрим два ряда:

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ , где

$$b_n = |a_n| + a_n, \quad c_n = |a_n| - a_n.$$

Очевидно, что для всех номеров либо  $b_n = 0$ ,  $c_n = 2 \cdot |a_n|$ , либо  $b_n = 2 \cdot |a_n|$ ,  $c_n = 0$ , т.е. эти ряды положительны и каждый из них меньше сходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot |a_n|$  – оба ряда сходятся. Тогда сходится и их почленная разность (см. п.6.1) – ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - c_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

2. Если теперь последовательность  $(a_n)$  – комплексная, то  $|Re(a_n)| \leq |a_n|$ ,  $|Im(a_n)| \leq |a_n|$  и по признаку сравнения сходятся положительные ряды  $\sum_{n=1}^{+\infty} |Re(a_n)|$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} |Im(a_n)|$ . Тогда по уже доказанному сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{+\infty} Re(a_n)$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} Im(a_n)$ , что равносильно сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  (утверждение 2 в конце п. 6.1).

Пример. Дан комплексный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + i \cdot n}$ . Построим положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^2 + i \cdot n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2}}.$$

Этот ряд сходится, так как  $\frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2}} < \frac{1}{n^2}$ , а ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , как известно, сходится. Мы показали, таким образом, что исследуемый комплексный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + i \cdot n}$  сходится абсолютно.

Замечания. 1. Проверка ряда на абсолютную сходимость результативна только при положительном ответе: абсолютно сходящийся ряд сходится. Если же абсолютной сходимости нет, то вопрос о сходимости остается открытым.

2. Для абсолютно сходящегося ряда имеет место неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

Рассмотрим два простых признака сходимости, применимых к произвольным числовым рядам.

Теорема. (Признак Коши). Если существует предел

$$K = \lim |a_n|^{1/n}, \text{ то}$$

- 1) при  $K < 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится (абсолютно);
- 2) при  $K > 1$  этот ряд расходится.
- 3) при  $K = 1$  признак Коши не работает – существуют и сходящиеся и расходящиеся ряды с  $K = 1$ .

Доказательство. 1. Пусть  $K < 1$ . По определению предела почти для всех номеров выполняется неравенство

$$\left| |a_n|^{1/n} - K \right| < \frac{1 - K}{2} \quad \left( \frac{1 - K}{2} > 0 \right).$$

Отсюда

$$|a_n|^{1/n} - K < \frac{1 - K}{2} \implies |a_n|^{1/n} < \frac{1 + K}{2} \implies |a_n| < \left( \frac{1 + K}{2} \right)^n.$$

Мы показали, что положительный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  мажорируется сходящимся рядом, порожденным геометрической прогрессией со знаменателем  $\frac{1 + K}{2} < 1$ . Утверждение 1 доказано.

2. Пусть  $K > 1$ . По определению предела почти для всех номеров

$$\left| |a_n|^{1/n} - K \right| < \frac{K - 1}{2} \quad \left( \frac{K - 1}{2} > 0 \right), \text{ откуда}$$

$$-\frac{K - 1}{2} < |a_n|^{1/n} - K \implies |a_n|^{1/n} > \frac{1 + K}{2} > 1,$$

т.е.  $|a_n| > 1$ , и неверно, что  $\lim a_n = 0$ . По признаку расходимости ряд расходится.

3. Для очевидно расходящегося ряда с  $a_n \equiv 1$   $K = 1$ , но и для сходящегося ряда Дирихле  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  тоже  $K = \lim \left( \frac{1}{n^2} \right)^{1/n} = 1$ .

Теорема (признак д'Аламбера<sup>3</sup>). Если существует предел

$$D = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \text{ то}$$

- 1) при  $D < 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится (абсолютно);
- 2) при  $D > 1$  этот ряд расходится.
- 3) при  $D = 1$  признак д'Аламбера не работает – существуют и сходящиеся и расходящиеся ряды с  $D = 1$ . Доказывать эту теорему мы не будем.

Если рассмотренные выше простейшие приемы исследования ряда на сходимость не срабатывают, мы рекомендуем обратиться за консультацией к математику-профессионалу.

### 6.5. Оценивание суммы сходящегося числового ряда

Если числовой ряд сходится, то его сумма  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  есть некоторое комплексное число.

Определение. Оценкой суммы сходящегося числового ряда будем называть любой круг на комплексной плоскости, накрывающий точку  $A$  (сумму ряда).

Круг задается своими центром и радиусом. Очевидно, из двух кругов-оценок лучше тот, радиус которого меньше.

Примеры. 1. Для вещественного ряда с чередованием знаков  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница,  $|A - A_n| < a_{n+1}$ , т.е. сумма  $A$  лежит внутри круга с центром в точке  $A_n$  и радиусом  $a_{n+1}$ . Вследствие вещественности ряда круг вырождается в интервал  $]A_n - a_{n+1}, A_n + a_{n+1}[$ .

2. Пусть сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  установлена с помощью признака Коши, т.е. существует конечный предел  $K = \lim |a_n|^{1/n} < 1$ . Выберем число  $q$  между  $K$  и единицей ( $K < q < 1$ ).

По определению предела последовательности, начиная с некоторого номера  $n_1$  будет выполняться неравенство  $|a_n|^{1/n} < q$ , или  $|a_n| < q^n$ . Поэтому при  $n \geq n_1$

$$|A - A_n| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots < q^{n+1} + q^{n+2} + \dots = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Пусть требуется построить круг-оценку с радиусом  $\varepsilon$ . Если выполнено неравенство  $\frac{q^{n_1+1}}{1-q} < \varepsilon$ , то в качестве центра круга можно взять число  $A_{n_1}$ . Иначе следует найти такой номер  $n_2$  (большой, чем  $n_1$ ), что  $\frac{q^{n_2+1}}{1-q} \leq \varepsilon$ . Такой номер, очевидно, найдется.

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ . Здесь  $K = \lim \left| \frac{n^2}{3^n} \right|^{1/n} = \frac{1}{3}$ . Возьмем  $q = \frac{1}{2}$  и найдем номер  $n_1$ , начиная с которого  $\left| \frac{n^2}{3^n} \right|^{1/n} \leq \frac{1}{2}$ . Перебором первых натуральных чисел  $1, 2, \dots$  находим, что  $n_1 = 13$ . Пусть, например,  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Решая неравенство  $\frac{0.5^n}{1-0.5} < 10^{-6}$ , найдем, что  $n_2 = 20$ . Итак, круг с центром в точке  $A_{20} = \sum_{n=1}^{20} \frac{n^2}{3^n} \approx 1.4999999$  и радиусом  $10^{-6}$  заведомо накрывает сумму ряда (можно показать, что сумма равна 1.5).

3. Аналогично строится оценка суммы, если сходимость ряда установлена с помощью признака д'Аламбера. Оценим, например, сумму ряда <sup>4</sup>  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . Здесь

$$D = \lim \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

<sup>3</sup>Жан Лерон д'Аламбер (1717-1783) – французский математик и механик, член многих академий, один из авторов знаменитой "Энциклопедии наук, искусств и ремесел".

<sup>4</sup>Для любого натурального числа  $n$   $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . (Этот знак читается  $n$ -факториал). По определению полагают  $0! = 1$ .

Возьмем  $q = \frac{1}{5}$ . Тогда из неравенства  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{5}$  находим, что  $n_1 = 5$ . Следовательно, при  $n \geq 5$

$$|A - A_n| = a_n + a_{n+1} + \dots < a_n \cdot (0.2 + 0.2^2 + \dots) = \frac{0.25}{n!}.$$

Полагая, например,  $\varepsilon = 10^{-6}$  и решая (перебором первых натуральных чисел  $1, 2, \dots$ ) неравенство  $\frac{0.25}{n!} < 10^{-6}$ , находим, что  $n_2 = 9$ . Мы установили, что круг с центром в точке  $A_9 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!} \approx 2.7182815$  и радиусом  $10^{-6}$  заведомо покрывает сумму ряда.

**Замечания.** 1. Сумма ряда из последнего примера встречается так часто, что для нее введено стандартное обозначение  $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ .

2. В практических вычислениях часто употребляют термин "скорость сходимости ряда". Рассмотрим два примера.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lg(n+1)}.$$

Признак Лейбница показывает, что оба ряда сходятся. Однако для получения круга-оценки с радиусом  $10^{-4}$  необходимо просуммировать:

для первого ряда 9 слагаемых, так как  $|A - A_9| < a_{10} = 10^{-4}$ ,

а для второго ряда  $10^{10^4} - 1$  слагаемых, так как только начиная с этого номера выполняется неравенство  $\frac{1}{\lg(n+1)} < 10^{-4}$ .

Ясно, что вычислить сумму девяти слагаемых в первом примере нетрудно (можно и вручную). Что же касается второй суммы, то даже располагая компьютером, который вычисляет одно слагаемое ряда за  $10^{-10}$  секунды, придется затратить на ее вычисление  $10^{10^4-10} = 10^{9990}$  секунд, т.е. примерно  $10^{9983}$  лет (!!!).

Эти два простых примера показывают, какой смысл вкладывают в слова "скорость сходимости ряда".

Отметим, что за улучшение оценки, т.е. за уменьшение радиуса круга-оценки приходится платить увеличением количества слагаемых в частной сумме  $A_n$ , принимаемой за центр этого круга.