

Глава 7. СТЕПЕННОЙ РЯД. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

7.1. Степенной ряд

Определение. *Степенным рядом* называют семейство числовых рядов вида

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad (7.1.1)$$

где $(a_n)_0^{+\infty}$ – заданная последовательность комплексных чисел, а z – комплексная переменная. Фиксируя значение этой переменной, мы извлечем из семейства различные числовые ряды.

Числа a_k , $k = 0, 1, \dots$ называют *коэффициентами* степенного ряда.

Замечание. При $z = 0$ и $n = 0$ в (7.1.1) возникает неопределенность: $a_0 \cdot 0^0$. Поэтому лучше было бы писать $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$. Однако пишут короче $-\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, понимая это как $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$.

Пример. Пусть дан степенной ряд

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Положив $z = -1$, получим числовой ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (\text{сходящийся!}).$$

Положив $z = 1$, получим числовой ряд

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{расходящийся!}).$$

Из этого примера видно, что при одних значениях переменной степенной ряд может превращаться в сходящийся числовой ряд, а при других – в расходящийся. Поэтому представляет интерес множество точек комплексной плоскости, в которых степенной ряд сходится.

Отметим сначала, что при $z = 0$ сходится любой степенной ряд, так как его сумма есть просто a_0 . Если $z \neq 0$, то применим к степенному ряду (7.1.1) признак д'Аламбера, т.е. попробуем вычислить предел

$$D(z) = \lim \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \cdot \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Мы сознательно обозначили этот предел $D(z)$, чтобы подчеркнуть, что (в отличие от случая числового ряда) он зависит от точки z , в которой вычисляется.

Если $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то $D(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$, т.е. степенной ряд сходится (абсолютно) на всей плоскости.

Если $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, то $D(z) = +\infty$ при всех $z \neq 0$, т.е. степенной ряд сходится только в нуле.

Если $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha > 0$, то степенной ряд сходится (абсолютно) при $D(z) = \alpha \cdot |z| < 1$, т.е. внутри круга с центром в начале координат и радиусом $R = \frac{1}{\alpha}$. Вне этого круга $D(z) = \alpha \cdot |z| > 1$, т.е. степенной ряд расходится. На границе круга $D(z) = 1$, и признак д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости степенного ряда.

Замечания. 1. Эти же утверждения можно было бы получить, пользуясь вместо признака Д'Аламбера признаком Коши.

2. Если последовательности $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ и $|a_n|^{1/n}$ не имеют пределов, то признаки Д'Аламбера и Коши не работают. Однако можно показать, что и в этом случае у степенного ряда существует *круг сходимости* с центром в начале координат.

Если договориться считать начало координат "кругом" нулевого радиуса, а комплексную плоскость – "кругом" бесконечного радиуса, то мы видим, что справедлива

Теорема. У всякого степенного ряда есть круг сходимости (с центром в начале координат). Внутри этого круга степенной ряд сходится (абсолютно), а вне его – расходится.

Радиус круга сходимости степенного ряда принято называть *радиусом сходимости ряда*.

Примеры. 1. Применим к ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ признак д'Аламбера

$$D(z) = \lim \left| \frac{z^{n+1}n!}{(n+1)!z^n} \right| = |z| \cdot \lim \frac{1}{n+1} \equiv 0$$

Ряд сходится абсолютно на всей комплексной плоскости.

2. К ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} (2 + (-1)^n) \cdot z^n$ признак д'Аламбера неприменим, так как предел

$$D(z) = \lim \left| \frac{(2 + (-1)^{n+1}) \cdot z^{n+1}}{(2 + (-1)^n) \cdot z^n} \right| = |z| \lim \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}$$

не существует ни при каком значении переменной z (кроме нуля). Используя признак Коши

$$K(z) = \lim |(2 + (-1)^n) \cdot z^n|^{1/n} = |z| \cdot \lim |2 + (-1)^n|^{1/n} = |z|,$$

получаем, что этот ряд сходится внутри круга единичного радиуса. Отдельно следует изучить поведение ряда на границе круга, где признак Коши не работает. Нетрудно видеть, что при $|z| = 1$ $\lim |(2 + (-1)^n) z^n|$ не существует, и, следовательно, во всех точках границы круга ряд расходится (признак расходимости!).

3. Применив к ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ признак д'Аламбера, получим

$$D(z) = \lim \left| \frac{z^{n+1}n}{(n+1)z^n} \right| = |z| \cdot \lim \frac{n}{n+1} = |z|.$$

Ряд сходится абсолютно при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$. Как показано выше, на окружности $|z| = 1$ есть точки, в которых ряд сходится (например, $z = -1$), и точки, в которых ряд расходится (например, $z = 1$).

4. Применив к ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ признак д'Аламбера, получим

$$D(z) = \lim \left| \frac{z^{n+1}n^2}{(n+1)^2 z^n} \right| = |z| \cdot \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = |z|.$$

Ряд сходится абсолютно при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$. Во всех точках границы круга сходимости ряд сходится абсолютно ($\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле с $p = 2 > 1$).

5. Применив к ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n \cdot z^n$ признак Коши, получим

$$K(z) = \lim |n^n z^n|^{1/n} = |z| \cdot \lim n = +\infty \quad (z \neq 0).$$

Этот ряд сходится только в нуле.

Замечания. 1. Как видно из примеров 2-4 на границе круга сходимости степенные ряды могут вести себя по-разному.

2. Можно рассматривать степенные ряды, центр круга сходимости которых расположен не в нуле, а в некоторой точке p комплексной плоскости. Эти ряды имеют вид

$$a_0 + a_1(z-p) + \dots + a_n(z-p)^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-p)^n.$$

7.2. Аналитические функции

Если радиус круга сходимости степенного ряда отличен от нуля, то внутри этого круга (а может быть, и в некоторых точках его границы) задана функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Определение. *Аналитической функцией* называется функция, являющаяся суммой степенного ряда.

Замечание. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы рассматриваем только аналитические функции, определяемые степенными рядами, у которых центр круга сходимости расположен в начале координат.

Аналитическая функция есть естественное обобщение полинома и наследует ряд его полезных свойств. Так, например, *можно показать, что* она непрерывна внутри круга сходимости.

В свою очередь, полином оказывается частным случаем аналитической функции (все коэффициенты определяющего его ряда, начиная с некоторого, равны нулю).

Можно показать также, что сумма и произведение двух аналитических функций суть аналитические функции (в меньшем из их кругов сходимости), причем сложение и умножение аналитических функций выполняются так же, как соответствующие операции над полиномами.

Деление аналитических функций рассмотрим на примере. Пусть

$$f(z) = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots \quad (|z| < 1),$$

$$g(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (|z| < 1).$$

Запишем функцию-частное в виде степенного ряда, коэффициенты которого подлежат определению.

$$(f/g)(z) = \frac{1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots}{1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Приведем обе части равенства к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной в числителях:

$$a_0 = 1$$

$$a_0 + a_1 = -1$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -1 \dots$$

Отсюда

$$a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = 2, a_3 = -2, \dots, a_n = 2 \cdot (-1)^n, \dots$$

Итак,

$$(f/g)(z) = 1 - 2z + 2z^2 - \dots + 2(-1)^n z^n + \dots \quad (|z| < 1).$$

Аналогично производится деление любых аналитических функций (при условии, что $g(0) \neq 0$!).

Замечание. При этом, если R – меньший из радиусов сходимости рядов, определяющих функции f и g , а r – наименьший из модулей нулей функции g , то радиус сходимости ряда-частного есть меньшее из чисел R и r .

7.3. Экспонента

Знакомство с аналитическими функциями начнем с *экспоненты*

$$\exp(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Как было установлено в примере 1 (п.7.1) эта функция определена на всей комплексной плоскости. Рассмотрим некоторые ее свойства.

1) $\exp(0) = 1$ (получается подстановкой),

2) $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y)$.

Действительно, перемножая ряды

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \exp(y) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots,$$

получим

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \dots = \\ &= 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots = \exp(x+y). \end{aligned}$$

3) $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z + (-z)) = \exp(0) = 1$.

Из этого *тождества* следует, во-первых, что экспонента не обращается в нуль, а, во-вторых, что

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

4) $\exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Если $m \in \mathbb{N}$, то

$$\exp(m) = \exp(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_m) = (\exp(1))^m = e^m.$$

5) На вещественной оси экспонента положительна и возрастает. Действительно, если $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, то

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots > 0; \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0.$$

$$y > x \implies y - x > 0 \implies \exp(y - x) > 1,$$

$$\exp(y) = \exp(y - x + x) = \exp(y - x) \cdot \exp(x) \implies \exp(y) > \exp(x).$$

6) На мнимой оси ($y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k} y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Не имея возможности в рамках нашего курса доказать это, сообщим, что ряды, стоящие в вещественной и мнимой частях формулы (7.3.1) определяют "всеми известными" функции косинус и синус

$$\cos(y) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!}, \quad \sin(y) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}. \quad (7.3.2)$$

Повторяем: эти формулы – не определения. Они могут быть доказаны.

Теперь мы можем записать (7.3.1) в виде

$$\exp(iy) = \cos(y) + i \cdot \sin(y) \quad (7.3.3)$$

(эта формула уже была "декларирована" в п.2.3).

Заменяя y на $(-y)$ и учитывая четность косинуса и нечетность синуса (которые, кстати, следуют из формул (7.3.2)), получим

$$\exp(-iy) = \cos(y) - i \cdot \sin(y). \quad (7.3.4).$$

Формулы (7.3.3) и (7.3.4) называются формулами Эйлера.¹

Формулы Эйлера можно переписать так:

$$\cos(y) = \frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2}, \quad \sin(y) = \frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2i}; \quad y \in \mathbb{R}. \quad (7.3.5)$$

Определение. Аналитические функции косинус и синус *задаются на комплексной плоскости* формулами Эйлера (7.3.5)

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}; \quad z \in \mathbb{C}.$$

¹Леонард ЭЙЛЕР (1707-1783) – математик, физик, механик и астроном, член Петербургской АН, Парижской АН, один из создателей вариационного исчисления, аналитической теории чисел, дифференциальной геометрии, автор многочисленных открытий в математическом анализе и других областях математики.

Замечание. Не следует ожидать, что у этих *новых* функций (имена те же, но область определения другая!) сохранятся все, известные из школы, свойства.

Например, "основное тригонометрическое тождество" сохраняется

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) &= \\ &= \left(\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \right)^2 + \left(\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \right)^2 \equiv 1,\end{aligned}$$

а неравенства $|\cos(z)| \leq 1$, $|\sin(z)| \leq 1$ – нет. Например,

$$\cos(i) = \frac{\exp(i \cdot i) + \exp(-i \cdot i)}{2} = \frac{\exp(-1) + \exp(1)}{2} = \frac{e + 1/e}{2} > 1!$$

7) Если $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), то

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)).$$

Эта формула сводит вычисление комплексной экспоненты к вычислению вещественных экспоненты, косинуса и синуса.

8) Из (7) следует, что комплексная экспонента – периодическая функция с периодом $2\pi i$:

$$\begin{aligned}\exp(z + 2\pi i) &= \exp(x + i(y + 2\pi)) = \\ &= \exp(x) \cdot (\cos(y + 2\pi) + i \cdot \sin(y + 2\pi)) = \\ &= \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) = \exp(x + iy) = \exp(z).\end{aligned}$$

9) Из свойства 7 следует также, что

$$|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z)), \quad \arg(\exp(z)) = \operatorname{Im}(z).$$

7.4. Обратная функция

Пусть $f : X \rightarrow Y$, $x \in X$, $y = f(x) \in Y$ (рис.7.1)

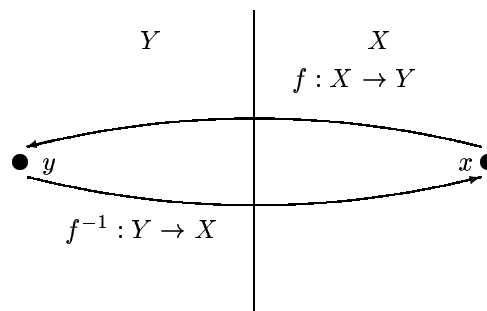


Рис.7.1

В соответствии с принятым пониманием слова функция (оператор, отображение) из каждой точки множества X , на котором определена f , выходит *ровно одна* стрелка. В множестве Y , где лежат значения функции f (они не обязательно исчерпывают это множество) ситуация иная: в некоторых его точках может не оказаться *ни одного* окончания стрелки, в других точках может оканчиваться *как угодно много* стрелок и, наконец, в каких-то точках может оканчиваться *ровно по одной* стрелке. Договоримся считать в этом пункте, что Y – *множество значений* функции f , т.е. в каждой его точке оканчивается *хотя бы одна* стрелка. В таком случае говорят, что f отображает X на (а не в) Y и пишут $Y = f(X)$.

Примеры. 1. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z) = z^2$. В точке $w = 0$ оканчивается только одна стрелка: единственным прообразом нуля является ноль. Во всех остальных точках плоскости оканчивается по две стрелки (у каждой из них два прообраза $z_1 = |w|^{1/2} \cdot \exp\left(i \cdot \frac{\arg(w)}{2}\right)$ и $z_2 = -z_1$).

2. $f : \mathbb{C} \rightarrow \{0\}$, $w = f(z) \equiv 0$. Множество значений этой функции (функции-константы) состоит всего из одной точки, в которой оканчиваются стрелки, выходящие из всех точек комплексной плоскости – области определения f .

3. $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $y = \sin(x)$. В силу периодичности "школьного" синуса в каждой точке сегмента $[-1, 1]$ оканчивается бесконечно много стрелок. Так, например, полный прообраз нуля состоит из точек $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$, $y = \sin(x)$. Эта функция отлична от рассмотренной в примере 3, поскольку у них разные области определения. Функцию из примера 4 принято называть сужением "школьного" синуса на сегмент $[-\pi/2, \pi/2]$. Теперь в каждой точке множества значений оканчивается ровно одна стрелка. Говорят, что полный прообраз точки $y \in [-1, 1]$ состоит из одной точки $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Поставим теперь вопрос об изменении "направления действия" отображения f . При этом каждый образ должен поменяться местами со своим полным прообразом. Очевидно, что это возможно только в ситуации, когда полный прообраз каждой точки $y = f(x) \in Y$ состоит ровно из одной точки $x \in X$, т.е. когда в каждой точке множества Y оканчивается ровно одна стрелка. Если это условие выполнено, то следует лишь изменить направление каждой стрелки. Тогда образы станут прообразами, а прообразы – образами, множество значений – областью определения, а область определения – множеством значений. Тем самым будет построена новая функция, которую называют *обратной* к функции f и обозначают f^{-1} (рис.7.1).

Из четырех рассмотренных выше примеров лишь в четвертом выполнены условия для построения обратной функции. Эту функцию следует назвать $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ (ее часто обозначают \arcsin). Точно так же сужение косинуса на $[0, \pi]$ имеет обратную функцию $\cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, обозначаемую часто \arccos .

Для пары функций

$$f : X \rightarrow Y = f(X), \quad \text{и} \quad f^{-1} : Y \rightarrow X = f^{-1}(Y)$$

имеет место тождество

$$(f^{-1} \circ f)(x) \equiv x, \quad x \in X :$$

"Если из произвольной точки $x \in X$ перейти по единственной, начинающейся в ней стрелке, в точку $y \in Y$, а из нее пойти по *единственной*, оканчивающейся в ней стрелке в обратном направлении, то придем опять в точку x ".

Аналогично,

$$(f \circ f^{-1})(y) \equiv y, \quad y \in Y :$$

Отметим, наконец, что $(f^{-1})^{-1} = f$, и естественно называть f и f^{-1} *взаимно обратными* функциями.

7.5. Логарифм. Степенная функция

Вследствие своей периодичности экспонента не имеет обратной функции. В этом пункте мы рассмотрим сужение экспоненты на полосу

$$-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi,$$

которое будем по-прежнему обозначать \exp . Покажем, что

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \implies z_1 = z_2.$$

1) Из равенства $\exp(x_1 + iy_1) = \exp(x_2 + iy_2)$, следует, что

$$\exp(x_1) = |\exp(x_1 + iy_1)| = |\exp(x_2 + iy_2)| = \exp(x_2).$$

Но на вещественной оси экспонента возрастает и из равенства $\exp(x_1) = \exp(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$.

2) Из равенства $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ следует, что

$$y_2 = \arg(\exp(z_2)) = \arg(\exp(z_1)) + 2k\pi = y_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Но $y_1, y_2 \in]-\pi, \pi]$ и, следовательно, $y_1 = y_2$, т.е. у каждого образа есть единственный прообраз!

Итак, сужение экспоненты на полосу $-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi$ обратимо. Обратная функция называется *логарифм* и обозначается \ln или \log_e .

Замечание. Рассматриваемый нами логарифм называется *натуральным* или *неперовым*². В докомпьютерную эпоху широко применялся при вычислениях *десятичный (бригговский)* логарифм – \log_{10} . В теории информации

²Джон НЕПЕР (1550-1617) – шотландский математик. В работе "Описание таблиц логарифмов" (1614) Непер изложил свойства логарифмов, правила пользования таблицами и примеры их применений.

³Генри БРИГГ (1561-1631) – английский математик. Составил и издал таблицы логарифмов с 14 десятичными знаками. Опубликовал несколько астрономических и географических работ, в которых пропагандировал идеи И. Кеплера. Десятичные логарифмы были необходимым пособием в вычислениях до появления калькуляторов. Сейчас они забыты.

удобен *двоичный* логарифм, определяемый равенством $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Репетиторы до сих пор любят противопоставлять естественные игры в никому, кроме них самих, не нужные "логарифмы x по основанию a " (например, $\log_{\sqrt{5}}(x!)$).

Логарифм определен на множестве значений экспоненты, т.е. на всей комплексной плоскости кроме нуля. Значения логарифма заполняют полосу $-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi$. Имеют место тождества

$$\exp(\ln(z)) \equiv z \quad (z \neq 0); \quad \ln(\exp(z)) \equiv z \quad (-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi).$$

Из свойства 9 экспоненты имеем

$$\operatorname{Re}(\ln(z)) = \ln(|z|); \quad \operatorname{Im}(\ln(z)) = \arg(z) \implies \ln(z) = \ln(|z|) + i \cdot \arg(z).$$

Эта формула сводит вычисление комплексного логарифма к вычислению вещественного логарифма.

Можно показать, что логарифм – аналитическая функция в любом круге, не содержащем начала координат. Степенной ряд, суммой которого является логарифм, будет получен позже.

Рассмотрим теперь *степенную* функцию. Если $n \in \mathbb{N}$, то выражение z^n , $z \in \mathbb{C}$ – это сокращенная запись произведения:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ сомножителей}}.$$

Выражение z^{-n} , $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ – это рациональная дробь $\frac{1}{z^n}$.

А как понимать выражения z^π или z^i ? Как вычислить произведение, в котором π сомножителей или i сомножителей?

При $z, x \in \mathbb{C}$ полагают *по определению*

$$z^x = \exp(x \cdot \ln(z)).$$

Эта функция при фиксированном $x \in \mathbb{C}$ определена на всей комплексной плоскости за исключением начала координат. Для вещественных z и x она определена при $z > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что при *целых* показателях степени получаем известный ранее результат.

7.6. Матричная экспонента

Пусть A – квадратная $(n \times n)$ -матрица. Рассмотрим матричный степенной ряд

$$I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (7.6.1)$$

Покажем, что этот ряд сходится абсолютно при любой матрице A , т.е. сходятся абсолютно все n^2 числовых рядов

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^k)_{jm}}{k!}, \quad (j, m = 1, \dots, n). \quad (7.6.2)$$

Обозначим $M = \max_{j,m} (|a_{jm}|)$. Тогда при всех $j, m = 1, \dots, n$

$$|(A^2)_{jm}| = \left| \sum_{r=1}^n a_{jr} a_{rm} \right| \leq \sum_{r=1}^n |a_{jr}| \cdot |a_{rm}| \leq nM^2.$$

$$|(A^3)_{jm}| = \left| \sum_{r=1}^n (A^2)_{jr} \cdot a_{rm} \right| \leq n \cdot (nM^2) \cdot M = n^2 M^3.$$

И вообще $|(A^k)_{jm}| \leq n^{k-1} M^k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K \frac{(A^k)_{jm}}{k!} &\leq 1 + M + \frac{nM^2}{2!} + \dots + \frac{n^{K-1} M^K}{K!} \leq \\ &\leq 1 + nM + \frac{(nM)^2}{2!} + \dots + \frac{(nM)^K}{K!} \leq \exp(nM). \end{aligned}$$

Из ограниченности частных сумм положительного ряда следует, как известно, его сходимость. Таким образом, все ряды (7.6.2) сходятся абсолютно.

Определение. Сумма ряда (7.6.1), т.е. матрица, элементы которой – суммы числовых рядов (7.6.2), называется *экспонентой матрицы* A и обозначается $\exp(A)$.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$A^2 = \begin{bmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 0 & x^5 \\ -x^5 & 0 \end{bmatrix}$$

и т.д. Таким образом,

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ -(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим некоторые свойства матричной экспоненты.

1) $\exp(Ax) \cdot \exp(Ay) = \exp(A(x+y))$ ($x, y \in \mathbb{C}$, A – квадратная матрица).

Действительно, перемножая ряды

$$\exp(Ax) = I + Ax + \frac{A^2 x^2}{2!} + \frac{A^3 x^3}{3!} + \dots, \quad \exp(Ay) = I + Ay + \frac{A^2 y^2}{2!} + \frac{A^3 y^3}{3!} + \dots,$$

получим

$$\begin{aligned} \exp(Ax) \cdot \exp(Ay) &= I + A(x+y) + \frac{A^2}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{A^3}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + \dots = \\ &= I + A(x+y) + \frac{A^2(x+y)^2}{2!} + \frac{A^3(x+y)^3}{3!} + \dots = \exp(A(x+y)). \end{aligned}$$

Следствие. $\exp(A) \cdot \exp(-A) = \exp(A + (-A)) = \exp(O) = I$. Поэтому матрица $\exp(A)$ обратима и $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

Серьезное предупреждение. Для двух произвольных квадратных матриц одного порядка равенство $\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A+B)$, вообще говоря, места не имеет. Только если матрицы A и B коммутируют ($AB = BA$), то

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(B) \cdot \exp(A) = \exp(A+B).$$

2) Если $A = \text{diag}[a_1, \dots, a_n]$, то легко проверить, что

$$\exp(A) = \text{diag}[\exp(a_1), \dots, \exp(a_n)].$$

3) Покажем, что если матрицы A и B подобны ($A = S^{-1}BS$), то матрицы $\exp(A)$ и $\exp(B)$ подобны с той же матрицей, осуществляющей подобие, т.е. $\exp(A) = S^{-1} \cdot \exp(B) \cdot S$.

Действительно,

$$A^2 = (S^{-1}BS)^2 = S^{-1}BSS^{-1}BS = S^{-1}B^2S.$$

Аналогично, при всех $k \in \mathbb{N}$ $A^k = S^{-1}B^kS$. Поэтому

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{-1}B^kS}{k!} = S^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!} \cdot S = S^{-1} \cdot \exp(B) \cdot S.$$

Пример. Непосредственным вычислением можно получить, что

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} ix & 0 \\ 0 & -ix \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(ix) & 0 \\ 0 & \exp(-ix) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Замечание. Аналогично можно определить другие *аналитические* функции, заданные на множестве квадратных матриц. Некоторые из них реализованы в средах конечного пользователя.