

## Глава 15. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА

### 15.1. Определение двойного интеграла

Пусть  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$  – прямоугольник, и  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывная функция. Будем временно обозначать координаты точки на плоскости  $x$  и  $y$ .

Построим на сегментах  $[a, b]$  и  $[c, d]$  сетки

$$\{a = x_0, \dots, x_k = b\} \quad \text{и} \quad \{c = y_0, \dots, y_n = d\}.$$

Эти сетки порождают разбиение  $P$  прямоугольника  $\Delta$ , состоящее из  $k \cdot n$  элементарных прямоугольников

$$\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n).$$

Обозначим  $S_{ij}$  площадь элементарного прямоугольника  $\Delta_{ij}$  ( $S_{ij} = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$ ).

По аналогии с одномерным интегралом Римана введем суммы Дарбу, соответствующие разбиению  $P$ :

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m_{ij} S_{ij}, \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n M_{ij} S_{ij}.$$

Здесь  $m_{ij} = \inf_{\Delta_{ij}} \{f(x, y)\}$ ,  $M_{ij} = \sup_{\Delta_{ij}} \{f(x, y)\}$  – соответственно нижняя и верхняя грани множества значений функции  $f$  на элементарном прямоугольнике  $\Delta_{ij}$ .

Свойства сумм Дарбу для двойного интеграла совпадают с уже известными свойствами этих сумм для одномерного интеграла. В частности, если сетки на обеих осях состоят из двух точек каждая, то "разбиение" состоит из одного прямоугольника, и этому разбиению соответствуют:  $m(b-a)(d-c)$  – наименьшая из нижних и  $M(b-a)(d-c)$  – наибольшая из верхних сумм Дарбу. Кроме того, *любая* нижняя сумма Дарбу не больше *любой* верхней.

**Теорема.** Если  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывная функция, то существует ровно одно число, которое не меньше любой нижней суммы Дарбу и не больше любой верхней. Это число, разделяющее множество нижних и множество верхних сумм Дарбу, называют *двойным интегралом Римана* от функции  $f$  по прямоугольнику  $\Delta$ .

Обозначают двойной интеграл Римана так:

$$\iint_{\Delta} f \quad \text{или} \quad \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Приводя эту теорему без доказательства, еще раз подчеркнем, что двойной интеграл Римана – *единственное* число, удовлетворяющее неравенству

$$L(f, P) \leq \iint_{\Delta} f \leq U(f, P) \quad (15.1.1)$$

при любом разбиении  $P$  прямоугольника  $\Delta$ , и эта единственность обеспечивается кусочной непрерывностью функции  $f$ . При произвольной  $f$  может быть много чисел, удовлетворяющих неравенству (15.1.1).

Пусть теперь  $\Omega$  – часть плоскости, ограниченная замкнутой кусочно гладкой кривой, и  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывная функция. Построим *какой-нибудь* прямоугольник  $\Delta$ , содержащий  $\Omega$ , и определим на нем функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in \Omega \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \Delta \setminus \Omega \end{cases}. \quad (15.1.2)$$

Двойной интеграл Римана от  $f$  по области  $\Omega$  *определим* так:

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Delta} F.$$

"Физическое" обоснование этого определения понятно; несложно увидеть также, что это определение не зависит от выбора  $\Delta$ , ибо те элементарные прямоугольники, на которых  $F = 0$ , дают нулевой вклад в суммы Дарбу.

**Замечание.** Если  $f(x, y) \equiv 1$ , а  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ , то, очевидно,

$$\iint_{\Delta} f = (b-a) \cdot (d-c) = S(\Delta) \quad (\text{площадь прямоугольника } \Delta).$$

Если  $\Omega$  – часть плоскости, ограниченная кусочно гладкой кривой, а  $f \equiv \text{const} = 1$ , то число

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$$

естественно считать *по определению* площадью фигуры  $\Omega$ . Мы будем обозначать эту площадь  $S(\Omega)$ .

Рассмотрим две интерпретации двойного интеграла.

1. Электрический заряд распределен по пластине с поверхностной плотностью  $\rho$  (кулонов на квадратный метр). Тогда полный заряд пластины  $Q = \iint_{\Omega} \rho$ .

2. Рассмотрим цилиндр с поперечным сечением  $\Omega$  и образующей, параллельной оси  $Oz$ . Пусть тело  $M$  – часть этого цилиндра, ограниченная снизу плоскостью  $z = 0$ , а сверху – графиком неотрицательной непрерывной функции  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (рис.15.1). Тогда  $V(M) = \iint_{\Omega} f$  – объем тела  $M$ .

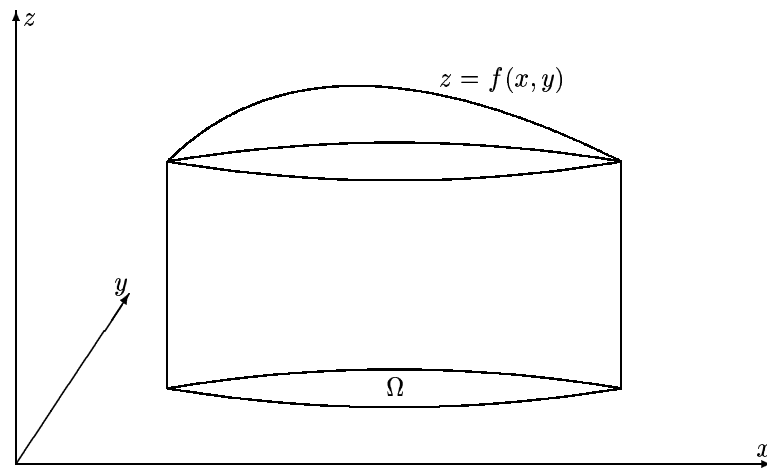


Рис.15.1

Рассмотрению третьей интерпретации двойного интеграла посвящен следующий пункт.

## 15.2. Площадь поверхности

Пусть  $G = r(\Omega)$  – гладкая поверхность. Мы хотим придать смысл понятию *площадь поверхности*.

Для начала будем считать, что  $\Omega$  – прямоугольник. Возьмем какое-нибудь его разбиение  $P$  и рассмотрим элементарный прямоугольник этого разбиения  $\Delta_{ij} = [u_i - u_{i-1}] \times [v_j - v_{j-1}]$ . Если бы на  $\Delta_{ij}$  матрица Якоби  $r'$  была постоянной, то сужение  $r$  на  $\Delta_{ij}$  имело бы вид

$$r(u, v) = r(u_{i-1}, v_{j-1}) + r' \cdot \begin{bmatrix} u - u_{i-1} \\ v - v_{j-1} \end{bmatrix},$$

где  $r' = [a^{(1)}, a^{(2)}]$  –  $(3 \times 2)$ -матрица.

Образом прямоугольника  $\Delta_{ij}$  при таком отображении был бы параллелограмм (рис. 15.2), построенный на направленных отрезках

$$\overrightarrow{a^{(1)}} \cdot (u_i - u_{i-1}) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{a^{(2)}} \cdot (v_j - v_{j-1}).$$

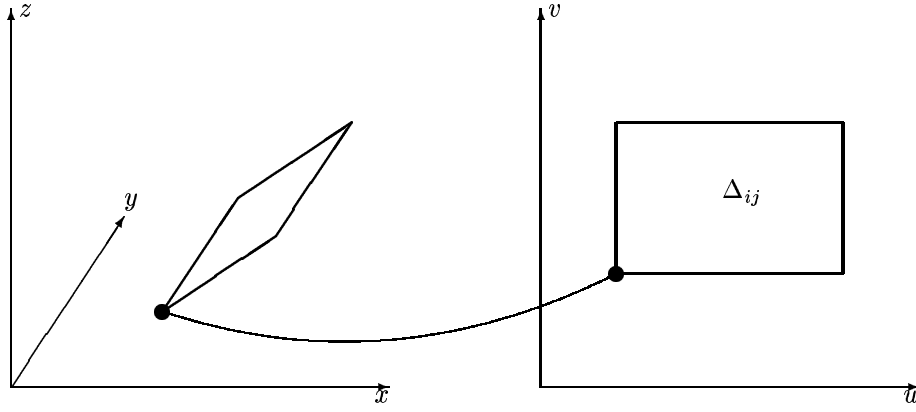


Рис.15.2

Из курса линейной алгебры известно, что площадь этого параллелограмма равна

$$\left| \det \left( [a^{(1)}, a^{(2)}, w] \right) \right| \cdot S_{ij}, \quad (15.2.1)$$

где  $S_{ij}$  - площадь  $\Delta_{ij}$ ,  $w$  - нормированный вектор, ортогональный  $a^{(1)}$  и  $a^{(2)}$ .

Поскольку определитель матрицы не меняется при ее транспонировании,

$$\begin{aligned} \left| \det \left( [a^{(1)}, a^{(2)}, w] \right) \right| &= \left( \det \left( [a^{(1)}, a^{(2)}, w]^T \cdot [a^{(1)}, a^{(2)}, w] \right) \right)^{1/2} = \\ &= \left( \det \left[ \begin{array}{c|c} B & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline \dots\dots\dots & 1 \end{array} \right] \right)^{1/2} = (\det(B))^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $B = (r')^T \cdot r'$ .

Итак, если бы  $r'$  была постоянной на  $\Delta_{ij}$ , то площадь куска поверхности  $r(\Delta_{ij})$  равнялась бы

$$(\det((r')^T \cdot r'))^{1/2} \cdot S_{ij}.$$

Естественно предположить, что истинная площадь  $\sigma_{ij}$  куска поверхности  $r(\Delta_{ij})$  должна удовлетворять неравенству

$$\inf_{\Delta_{ij}} \left\{ (\det((r')^T \cdot r'))^{1/2} \right\} \cdot S_{ij} \leq \sigma_{ij} \leq \sup_{\Delta_{ij}} \left\{ (\det((r')^T \cdot r'))^{1/2} \right\} \cdot S_{ij}.$$

Суммируя такие неравенства по всем  $i$  и  $j$ , получим

$$L \left( (\det((r')^T \cdot r'))^{1/2}, P \right) \leq \sigma \leq U \left( (\det((r')^T \cdot r'))^{1/2}, P \right).$$

Поскольку лишь одно число - двойной интеграл - удовлетворяет этому неравенству при любом разбиении  $P$ , мы заключаем, что

$$\sigma = \iint_{\Omega} (\det((r')^T \cdot r'))^{1/2}. \quad (15.2.2)$$

**Замечание.** Формула (15.2.2) *определяет* площадь *гладкой* поверхности. Естественно распространить это определение на случай кусочно гладкой поверхности, а также на случай, когда  $\Omega$  - произвольная область в  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная кусочно гладкой замкнутой кривой.

**Примеры.** 1. Как известно, график непрерывно дифференцируемой функции  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - гладкая поверхность (см. пример в п.11.3). В этом случае

$$r' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_u f & D_v f \end{bmatrix}, \quad (r')^T \cdot r' = \begin{bmatrix} 1 + (D_u f)^2 & D_u f \cdot D_v f \\ D_u f \cdot D_v f & 1 + (D_v f)^2 \end{bmatrix}$$

и формула (15.2.2) принимает вид

$$\sigma = \iint_{\Omega} (1 + (D_u f)^2 + (D_v f)^2)^{1/2} du dv.$$

2. Пусть непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi : \Omega \rightarrow G$  взаимно однозначно отображает область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  на область  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Тогда область  $G$  можно рассматривать как гладкую поверхность, задаваемую отображением (рис.15.3)

$$r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad r(u, v) = \begin{bmatrix} \varphi_1(u, v) \\ \varphi_2(u, v) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (r')^T \cdot r' = (\varphi')^T \cdot \varphi'.$$

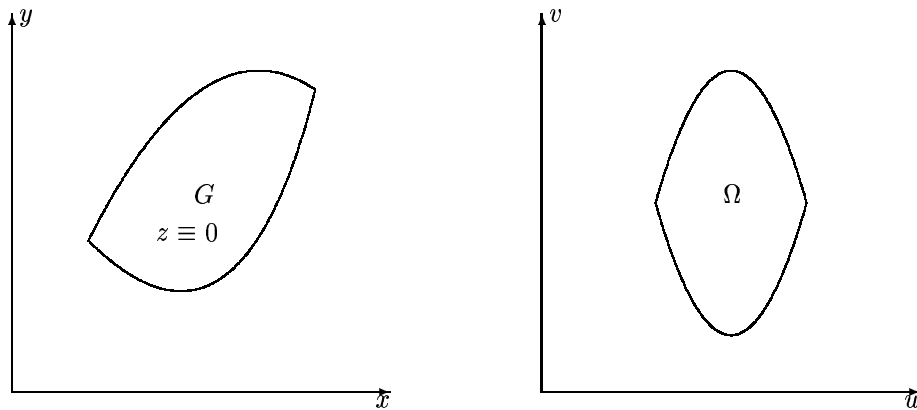


Рис.15.3

Поскольку  $\varphi'$  – квадратная матрица,  $(\det((\varphi')^T \cdot \varphi'))^{1/2} = |\det(\varphi')|$ , и формула (15.2.2) в этом случае переписывается так:

$$S(G) = \iint_{\Omega} |\det(\varphi')|. \quad (15.2.3)$$

В частном случае, когда  $G = \Omega$ , мы имеем  $\varphi' = I_2$  и  $S(G) = \iint_{\Omega} 1$ , т.е. мы вновь пришли к формуле (15.1.3).

### 15.3. Сведение двойного интеграла к повторному

В этом пункте мы проведем *правдоподобное рассуждение* (не следует принимать его за доказательство), основанное на интерпретации двойного интеграла как электрического заряда, распределенного по прямоугольнику  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$  с поверхностной плотностью  $f$ .

Возьмем на сегменте  $[a, b]$  произвольную точку с абсциссой  $x$  и "соберем" в ней заряд из всех точек прямоугольника, имеющих эту абсциссу (рис.15.4).

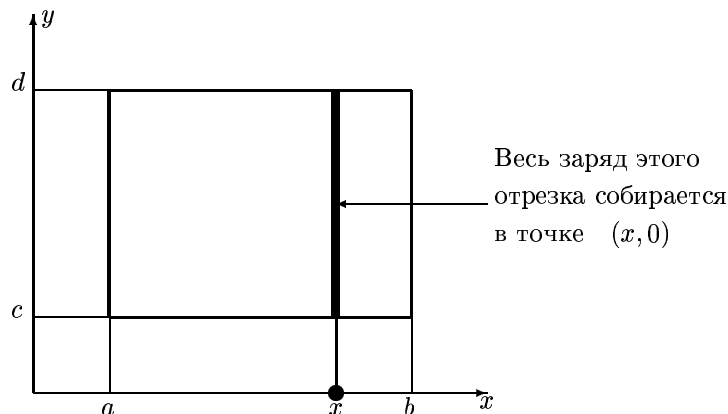


Рис.15.4

Проделив такую операцию для всех точек сегмента  $[a, b]$ , мы соберем заряд прямоугольника на этом сегменте. "Физически очевидно", что линейная плотность заряда будет равна

$$q(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

(подынтегральная функция есть функция только переменной  $y$ , так как  $x$  фиксирован. Эта функция – сужение  $f$  на отрезок, изображенный жирной линией на рис.15.4).

Полный заряд сегмента (бывший ранее полным зарядом прямоугольника) находится по уже известному правилу:

$$Q = \int_a^b q(x) dx.$$

Наше рассуждение привело к формуле

$$\iint_{\Delta} f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (15.3.1)$$

Можно показать, что эта формула справедлива для всякой кусочно непрерывной функции. Равноправие координат позволяет записать формулу, аналогичную (15.3.1):

$$\iint_{\Delta} f = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (15.3.2)$$

Интегралы, стоящие в правых частях формул (15.3.1) и (15.3.2), называют *повторными*.

Пример. Пусть  $\Delta = [0, 2] \times [0, 1]$ ,  $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ . Вычислим двойной интеграл двумя способами – по формулам (15.3.1) и (15.3.2).

$$1) \iint_{\Delta} f = \int_0^2 \left( \int_0^1 \sin(x + 2y) dy \right) dx.$$

Вычисляем "внутренний" интеграл ( $x$  фиксирован):

$$\int_0^1 \sin(x + 2y) dy = -\frac{1}{2} \cdot \cos(x + 2y) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) - \cos(x + 2)).$$

Вычисляем "внешний" интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 (\cos(x) - \cos(x + 2)) dx &= \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) - \sin(x + 2)) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin(2) - \sin(4) + \sin(2)) = \sin(2) - \frac{\sin(4)}{2}. \end{aligned}$$

$$2) \iint_{\Delta} f = \int_0^1 \left( \int_0^2 \sin(x + 2y) dx \right) dy.$$

Вычисляем "внутренний" интеграл ( $y$  фиксирован):

$$\int_0^2 \sin(x + 2y) dx = -\cos(x + 2y) \Big|_{x=0}^{x=2} = \cos(2y) - \cos(2 + 2y).$$

Вычисляем "внешний" интеграл:

$$\int_0^1 (\cos(2y) - \cos(2 + 2y)) dy = \frac{1}{2} \cdot (\sin(2y) - \sin(2 + 2y)) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sin(2) - \sin(4) + \sin(2)) = \sin(2) - \frac{\sin(4)}{2}.$$

Замечание. При сведении двойного интеграла к повторному техническая сложность вычисления получающихся одномерных интегралов может существенно зависеть от выбранного порядка интегрирования.

#### 15.4. Вычисление двойного интеграла от функции, заданной на "криволинейной трапеции".

"Криволинейной трапецией" мы называем область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченную прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $b > a$ ) и графиками кусочно гладких функций  $\varphi$ ,  $\psi$ , заданных на  $[a, b]$  и удовлетворяющих неравенству  $\varphi \leq \psi$  (рис.15.5).  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывная функция. Требуется вычислить интеграл  $\iint_{\Omega} f$ .

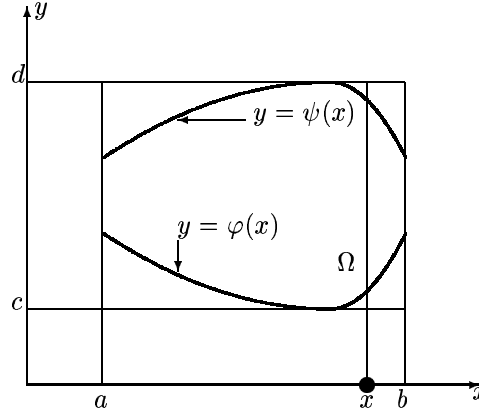


Рис.15.5

Обозначим

$$c = \min_{[a,b]} \{\varphi(x)\}, \quad d = \max_{[a,b]} \{\psi(x)\}.$$

Тогда прямоугольник  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$  будет содержать  $\Omega$ . Определим на  $\Delta$  функцию  $F$  по формуле (15.1.2), и сведем двойной интеграл к повторному

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Delta} F = \int_a^b \left( \int_c^d F(x, y) dy \right) dx.$$

Вычислим "внутренний" интеграл ( $x$  фиксирован – рис.15.5)

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_0^{\varphi(x)} F(x, y) dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy + \int_{\psi(x)}^d F(x, y) dy. \quad (15.4.1)$$

Если  $c \leq y < \varphi(x)$  или  $\psi(x) < y \leq d$ , то точка  $(x, y)$  не принадлежит  $\Omega$  и по построению  $F(x, y) = 0$ . Если  $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ , то точка  $(x, y)$  принадлежит  $\Omega$  и  $F(x, y) = f(x, y)$ .

Таким образом, подынтегральная функция в первом и третьем интегралах из (15.4.1) равна нулю тождественно и

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Мы получили правило сведения двойного интеграла к повторному для случая функции, заданной на "криволинейной трапеции":

$$\iint_{\Delta} = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Аналогично, если "криволинейная трапеция"  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , ограничена прямыми  $y = a$ ,  $y = b$  ( $b > a$ ) и графиками кусочно гладких функций  $\varphi$ ,  $\psi$ , заданных на  $[a, b]$  и удовлетворяющих неравенству  $\varphi \leq \psi$  (рис. 15.6)

$$\iint_{\Omega} = \int_a^b \left( \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

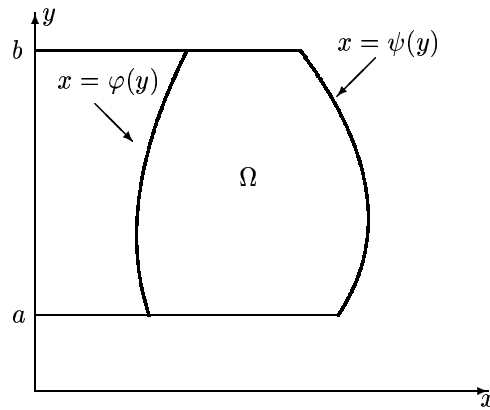


Рис.15.6

Пример. Пусть  $\Omega$  – часть плоскости, ограниченная линиями  $y = 0, y = x, x = 1$  (рис.15.7),  $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)) \cdot y$ .

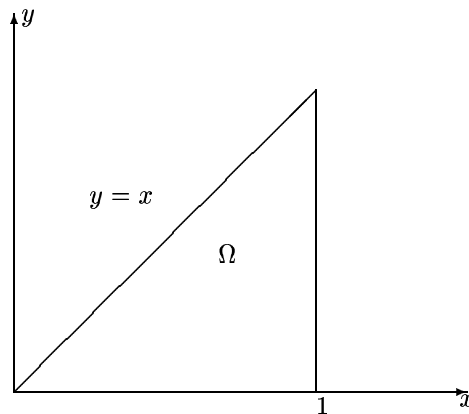


Рис.15.7

Тогда

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \left( \int_0^x \exp(-(x^2 + y^2)) \cdot y dy \right) dx.$$

Вычисляем "внутренний" интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^x \exp(-(x^2 + y^2)) \cdot y dy &= \exp(-x^2) \cdot \int_0^x y \exp(-y^2) dy = -\frac{1}{2} \cdot \exp(-x^2) \cdot \exp(-y^2) \Big|_{y=0}^{y=x} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\exp(-x^2) - \exp(-2x^2)). \end{aligned}$$

Вычисляем "внешний" интеграл:

$$\iint_{\Omega} f = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (\exp(-x^2) - \exp(-2x^2)) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left( \operatorname{erf}(1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right).$$

Здесь использована формула (см. пример 1 п. 13.7)

$$\int_0^x \exp(-a^2 t^2) dt = \frac{1}{|a|} \cdot \int_0^{x/|a|} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2|a|} \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{x}{|a|} \right).$$

Попробуйте вычислить этот двойной интеграл, используя вместо формулы (15.3.1) формулу (15.3.2). Вы убедитесь, что разные способы сведения двойного интеграла к повторному могут оказаться существенно разными по технической сложности их реализации.

### 15.5. Простейшие свойства двойного интеграла

Как и в случае одномерного интеграла, ограничимся перечислением: доказательства сложны, а то, что выдается обычно за доказательства, – в лучшем случае правдоподобные рассуждения.

Начиная с этого пункта мы возвращаемся к обычным обозначениям:  $x$  и  $y$  – точки плоскости (векторы в  $\mathbb{R}^2$ ),  $x_1$ ,  $x_2$  и  $y_1$ ,  $y_2$  – их координаты.

1. Если  $f$  – функция-константа  $f \equiv c \in \mathbb{R}$ , то  $\iint_{\Omega} f = c \cdot S(\Omega)$ .

2. Если  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , причем  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не имеют общих точек, кроме граничных ("не налегают" друг на друга), и имеют кусочно гладкие границы, а  $f$  кусочно непрерывна на  $\Omega$ , то

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f.$$

(Если заряженную пластину разрезать на части, то заряд всей пластины равен сумме зарядов ее частей).

3. Для любых кусочно непрерывных на  $\Omega$  функций  $f_1$ ,  $f_2$  и любых чисел  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$

$$\iint_{\Omega} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \iint_{\Omega} f_1 + \alpha_2 \iint_{\Omega} f_2$$

(линейность интеграла).

4. Если  $f_1$ ,  $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывные функции, причем  $f_1 \leq f_2$ , то

$$\iint_{\Omega} f_1 \leq \iint_{\Omega} f_2.$$

5. Средним значением функции  $f$  на  $\Omega$  называют число

$$\frac{1}{S(\Omega)} \cdot \iint_{\Omega} f.$$

Как и в случае одномерного интеграла, среднее значение функции не всегда является одним из ее значений, однако если  $f$  непрерывна на  $\Omega$ , то найдется такая точка  $x_{cp} \in \Omega$ , что

$$\frac{1}{S(\Omega)} \cdot \iint_{\Omega} f = f(x_{cp}).$$

Это утверждение называется *теоремой о среднем*.

### 15.6. Преобразование двойного интеграла подстановкой

Будем по-прежнему интерпретировать двойной интеграл как электрический заряд области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , распределенный на ней с поверхностной плотностью  $f$ . Подвергнем область деформации, т.е. зададим непрерывно дифференцируемую функцию  $\phi$ , взаимно однозначно отображающую  $G \subset \mathbb{R}^2$  на  $\Omega$ . Заряд области при такой ее деформации, очевидно, сохранится, а его распределение, т.е. поверхностная плотность, изменится. Обозначим новую плотность распределения заряда  $g$ .

Возьмем в  $G$  прямоугольник  $\Delta = [y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + h] \times [y_2^{(0)}, y_2^{(0)} + k]$ . Образом этого прямоугольника в  $\Omega$  при отображении  $\phi$  будет некоторый "кривоугольник"  $P$  (рис.15.8).



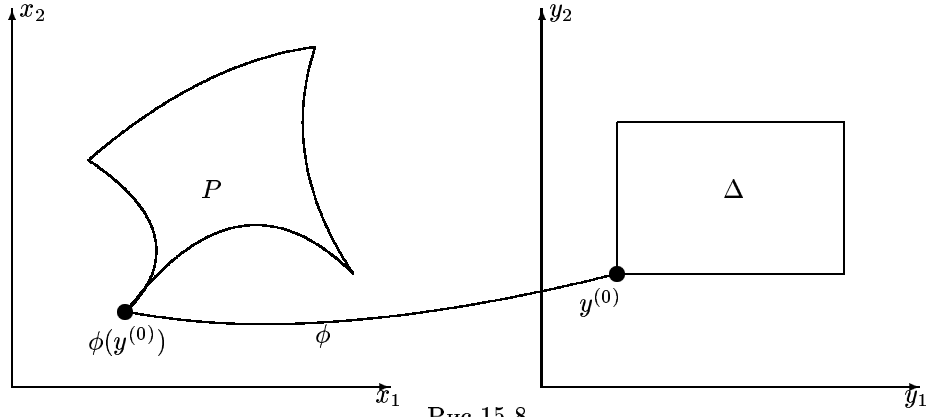


Рис.15.8

Прямоугольник  $\Delta$  и "кривоугольник"  $P$  несут на себе один и тот же заряд, т.е.

$$\iint_P f = \iint_{\Delta} g.$$

Если предположить для простоты рассуждений, что обе плотности ( $f$  и  $g$ ) непрерывны, то, по теореме о среднем, найдутся точки  $x_{cp} \in P$  и  $y_{cp} \in \Delta$ , для которых

$$f(x_{cp}) \cdot S(P) = \iint_P f = \iint_{\Delta} g = g(y_{cp}) \cdot S(\Delta).$$

Отсюда

$$g(y_{cp}) = f(x_{cp}) \cdot \frac{S(P)}{S(\Delta)}.$$

Стягивая прямоугольник  $\Delta$  к точке  $y^{(0)}$ , т.е. переходя к пределу ( $h = 0, k = 0$ ), получим

$$g(y^{(0)}) = f(\phi(y^{(0)})) \cdot \lim_{h=k=0} \frac{S(P)}{S(\Delta)}.$$

Но по формуле (15.2.2)

$$S(P) = \iint_{\Delta} |det(\phi')|.$$

По теореме о среднем ( $\phi$  – непрерывно дифференцируема) найдется такая точка  $c \in \Delta$ , что

$$S(P) = |det(\phi'(c))| \cdot S(\Delta).$$

При стягивании  $\Delta$  к точке  $y^{(0)}$  имеем

$$\lim_{h=k=0} \frac{S(P)}{S(\Delta)} = |det(\phi'(y^{(0)}))|,$$

и, следовательно, искомая связь между плотностями распределения заряда на  $G$  и на  $\Omega$  имеет вид

$$g(y) = f(\phi(y)) \cdot |det(\phi'(y))|.$$

Действительно, можно показать, что имеет место

**Теорема.** Если  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывная функция, а  $\phi$  – непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение  $G \subset \mathbb{R}^2$  на  $\Omega$ , то справедлива формула

$$\iint_{\Omega} f = \iint_G (f \circ \phi) |det(\phi')|.$$

Сравните эту формулу с правилом подстановки для преобразования одномерного интеграла в п.14.8.

Замечание. Условие взаимной однозначности отображения может нарушаться на границе области – теорема работает и в этом случае.

Пример. Вычислим интеграл

$$\iint_{\Omega_r} \exp(-(x_1^2 + x_2^2)) \, dx_1 \, dx_2,$$

где  $\Omega_r$  – круг радиуса  $r$  с центром в начале координат, являющийся образом прямоугольника  $G$  ( $0 \leq \rho \leq r$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) (рис.15.9) при отображении

$$\phi: \begin{bmatrix} x_1 = \rho \cdot \cos(\varphi) \\ x_2 = \rho \cdot \sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

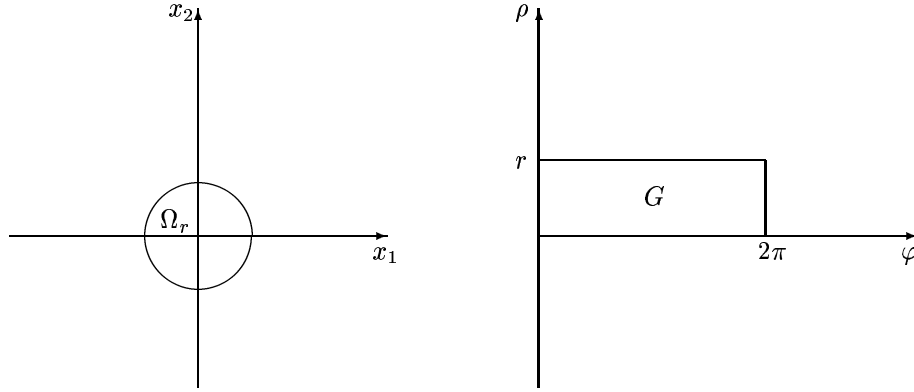


Рис.15.9

Это отображение не взаимно однозначно: правая и левая границы прямоугольника "склеиваются", а вся его нижняя граница переходит в одну точку – начало координат. Но, согласно замечанию к теореме, правило подстановки работает.

В п. 11.1 было показано, что  $\det(\phi') = \rho$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_r} \exp(-(x_1^2 + x_2^2)) \, dx_1 \, dx_2 &= \iint_G \exp(-\rho^2) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r \exp(-\rho^2) \cdot \rho \, d\rho \right) d\varphi = \pi \cdot (1 - \exp(-r^2)). \end{aligned}$$

### 15.7. Тройной интеграл

Конструкция тройного интеграла аналогична конструкции двойного, поэтому мы ограничимся определением и перечислением его свойств.

Пусть  $\Delta = [a, b] \times [c, d] \times [q, r]$  – прямоугольный параллелепипед в  $\mathbb{R}^3$ , и  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывная функция. Построим какие-нибудь разбиения сегментов  $[a, b]$ ,  $[c, d]$ , и  $[q, r]$ . Порождаемое ими разбиение параллелепипеда обозначим  $P$ .

Построим суммы Дарбу

$$L(f, P) = \sum_i \sum_j \sum_k m_{ijk} V_{ijk}, \quad U(f, P) = \sum_i \sum_j \sum_k M_{ijk} V_{ijk},$$

где

$$m_{ijk} = \inf_{\Delta_{ijk}} \{f(x, y, z)\}, \quad M_{ijk} = \sup_{\Delta_{ijk}} \{f(x, y, z)\},$$

$\Delta_{ijk}$  – элементарный параллелепипед разбиения  $P$ ,  $V_{ijk}$  – его объем.

Имеет место

Теорема. Существует единственное число  $J$ , удовлетворяющее неравенству

$$L(f, P) \leq J \leq U(f, P)$$

при любом разбиении  $P$ .

Это число называют *тройным интегралом* от функции  $f$  по параллелепипеду  $\Delta$ . Обозначают тройной интеграл так:

$$J = \iiint_{\Delta} f \quad \text{или} \quad J = \iiint_{\Delta} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Если  $G$  – произвольное тело в  $\mathbb{R}^3$ , ограниченное кусочно гладкой поверхностью, и  $f$  – вещественная кусочно непрерывная функция, заданная на  $G$ , то полагают *по определению*

$$\iiint_G f = \iiint_{\Delta} F,$$

где  $\Delta$  – произвольный прямоугольный параллелепипед, содержащий  $G$ , а  $F$  функция совпадающая с  $f$  на  $G$  и равная нулю вне  $G$ .

Объемом тела  $G \subset \mathbb{R}^3$ , ограниченного кусочно гладкой поверхностью, называют число

$$V(G) = \iiint_G 1.$$

Если  $G$  – часть цилиндра, поперечное сечение которого – плоская фигура  $\Omega$ , а образующая параллельна оси аппликат, причем  $G$  ограничена сверху графиком кусочно гладкой функции  $\psi$ , а снизу – графиком кусочно гладкой функции  $\phi$  ( $\phi \leq \psi$ ), то (рис.15.10)

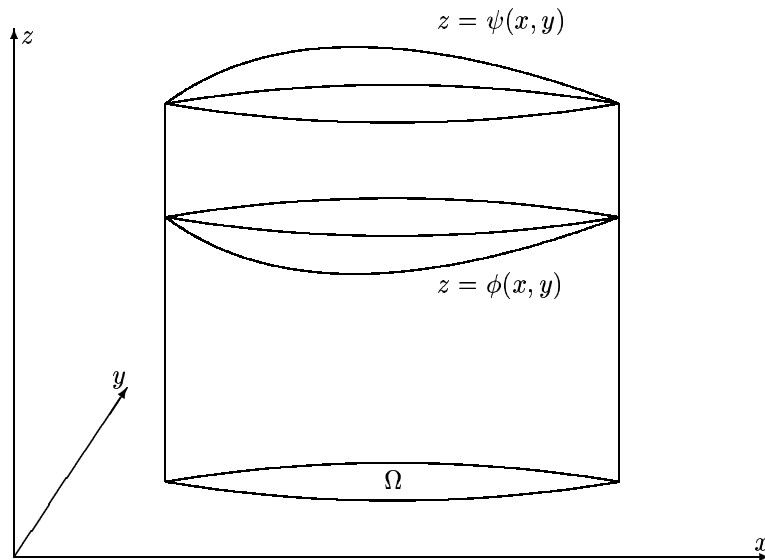


Рис.15.10

$$\iiint_G f = \iint_{\Omega} \left( \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$

Аддитивность тройного интеграла. Если  $G = G_1 \cup G_2$ , причем  $G_1$  и  $G_2$  не имеют общих точек, кроме граничных ("не налегают" друг на друга), и имеют кусочно гладкие границы, а  $f$  кусочно непрерывна на  $G$ , то

$$\iiint_G f = \iiint_{G_1} f + \iiint_{G_2} f.$$

(Если заряженное тело разрезать на части, то заряд всего тела равен сумме зарядов его частей.)

Линейность тройного интеграла. Для любых кусочно непрерывных на  $G$  функций  $f_1, f_2$  и любых чисел  $\alpha_1, \alpha_2$

$$\iiint_G (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \iiint_G f_1 + \alpha_2 \iiint_G f_2$$

Интегрирование неравенств. Если  $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывные функции, причем  $f_1 \leq f_2$ , то

$$\iiint_G f_1 \leq \iiint_G f_2.$$

Теорема о среднем. Если  $f$  непрерывна на  $G$ , то найдется такая точка  $c \in G$ , что

$$\frac{1}{V(G)} \cdot \iiint_G f = f(c).$$

Правило подстановки. Если  $G$  – тело в  $\mathbb{R}^3$ , ограниченное кусочно гладкой поверхностью,  $f$  – кусочно непрерывная вещественная функция, заданная на  $G$ , а  $\phi$  – непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение тела  $H \subset \mathbb{R}^3$  на  $G$ , то

$$\iiint_G f = \iiint_H (f \circ \phi) \cdot |\det(\phi')|.$$

Замечания. 1. Правило подстановки работает и в случае нарушения на границе взаимной однозначности отображения  $\phi$ .

2. Нетрудно заметить, что аналогичным образом можно определить интегралы любой кратности – "четверной", "пятерной" и т.д. (но, конечно, уже без геометрической их интерпретации).

3. Поскольку писать большое количество "крючков" – знаков интеграла – утомительно, часто интеграл кратности  $n$  записывают в виде  $\int_G f$ , где  $G$  – заданная часть  $\mathbb{R}^n$ .