

Глава 14. ИНТЕГРАЛ РИМАНА

14.1. Суммы Дарбу. Определение интеграла

В этом пункте мы будем рассматривать вещественные, кусочно непрерывные функции, заданные на некотором сегменте. Напомним, что функция называется *кусочно непрерывной* на сегменте, если она

- или непрерывна на этом сегменте,
- или имеет на этом сегменте конечное число точек разрыва и во всех этих точках существуют конечные односторонние пределы.

Мы будем говорить о *разбиении* сегмента $[a, b]$, если на этом сегменте задана сетка, содержащая концы сегмента – точки a и b . Записывать разбиение P мы будем так:

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}.$$

Здесь $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Итак, пусть на сегменте $[a, b]$ задана кусочно непрерывная вещественная функция f . Возьмем какое-нибудь разбиение P этого сегмента. Обозначим

$$J_k = [x_{k-1}, x_k]; \quad m_k = \inf_{x \in J_k} \{f(x)\}; \quad M_k = \sup_{x \in J_k} \{f(x)\}; \quad k = 1, \dots, n.$$

Назовем *нижней суммой Дарбу¹ функции f при разбиении P* число

$$L(f, P) = m_1(x_1 - x_0) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}),$$

а *верхней суммой Дарбу функции f при разбиении P* число

$$U(f, P) = M_1(x_1 - x_0) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Пример.

$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{при } 1 \leq x < 2 \\ 3(x - 2) & \text{при } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (\text{Рис.14.1}).$$

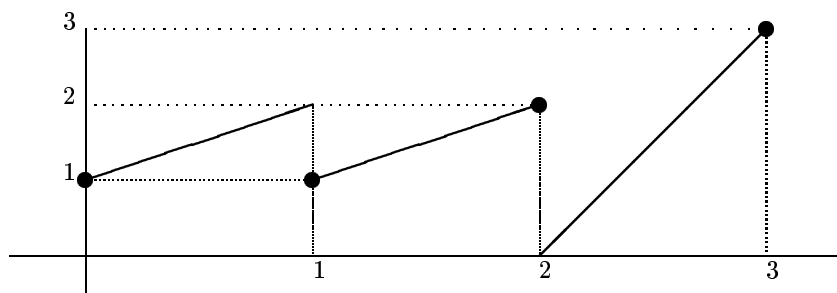


Рис.14.1

Возьмем разбиение $P = \{0, 1, 2, 3\}$.

На сегменте $[0, 1]$ наименьшее значение функции равно 1, наибольшего значения нет, но $\lim_{x \rightarrow 1-} = 2$. Следовательно, $m_1 = 1$, $M_1 = 2$.

На сегменте $[1, 2]$ наименьшее значение функции равно 1, наибольшее равно 2. Поэтому $m_2 = 1$, $M_2 = 2$.

На сегменте $[2, 3]$ наименьшего значения нет, но $\lim_{x \rightarrow 2+} = 0$; наибольшее значение функции равно 3. Следовательно, $m_3 = 0$, $M_3 = 3$.

Вычисляем суммы Дарбу

$$L(f, P) = 1 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (2 - 1) + 0 \cdot (3 - 2) = 2,$$

$$U(f, P) = 2 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (2 - 1) + 3 \cdot (3 - 2) = 7.$$

¹Жан Гастон ДАРБУ (1842-1917) – французский математик, член Парижской АН, чл.-корр. Петербургской АН.

Установим некоторые свойства сумм Дарбу.

1. $L(f, P) \leq U(f, P)$ – по построению.
2. При добавлении к сетке новой точки верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя – не уменьшается.

Доказательство. На рис.14.2 изображены разбиение P и полученное из него добавлением точки \tilde{x} разбиение P_1 . Очевидно, что верхние суммы Дарбу для этих разбиений отличаются лишь тем, что $U(f, P_1)$ вместо одного слагаемого $M_k(x_k - x_{k-1})$ содержит два: $M_k''(x_k - \tilde{x}) + M_k'(\tilde{x} - x_{k-1})$ (здесь $M_k'' = \sup_{x \in J_k''} \{f(x)\}$, $M_k' = \sup_{x \in J_k'} \{f(x)\}$).

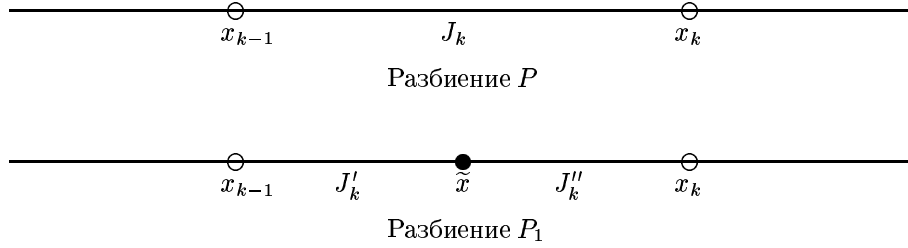


Рис.14.2

Поэтому

$$\begin{aligned} U(f, P) - U(f, P_1) &= M_k(x_k - x_{k-1}) - (M_k''(x_k - \tilde{x}) + M_k'(\tilde{x} - x_{k-1})) = \\ &= M_k((x_k - \tilde{x}) + (\tilde{x} - x_{k-1})) - M_k''(x_k - \tilde{x}) - M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) = \\ &= (M_k - M_k'') \cdot (x_k - \tilde{x}) + (M_k - M_k') \cdot (\tilde{x} - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Сегменты J'_k и J''_k суть части сегмента J_k . Поэтому $M_k' \leq M_k$ и $M_k'' \leq M_k$. Следовательно, $U(f, P) - U(f, P_1) \geq 0$, $U(f, P_1) \leq U(f, P)$.

Аналогично доказывается, что $L(f, P_1) \geq L(f, P)$.

Замечание. Очевидно, что это свойство выполняется при добавлении к разбиению *любого конечного* количества точек.

3. Для любых разбиений P_1 и P_2

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

Доказательство. Если $P_1 = P_2$, то неравенство очевидно (по построению). Если $P_1 \neq P_2$, то построим разбиение P , содержащее все точки P_1 и все точки P_2 . Тогда на основании свойства 2

$$L(f, P_1) \leq L(f, P), \quad U(f, P) \leq U(f, P_2).$$

Учитывая, что $L(f, P) \leq U(f, P)$, получим $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$.

Подведем итоги. Наименьшее количество точек в сетке – две. Соответствующее "разбиение" сегмента $[a, b]$ содержит единственный сегмент $J_1 = [a, b]$. Этому разбиению соответствуют *наименьшая нижняя* сумма Дарбу $m(b - a)$ и *наибольшая верхняя* сумма Дарбу $M(b - a)$ (здесь $m = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$, $M = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$).

Если исключить тривиальный случай функции-константы, когда $m = M$, то множество всех сумм Дарбу лежит на сегменте $[m(b - a), M(b - a)]$ и, следовательно, ограничено. Пусть $L(f) = \sup \{L(f, P)\}$, $U(f) = \inf \{U(f, P)\}$. Возможны два случая:

1. На сегменте $[m(b - a), M(b - a)]$ есть "пустой" промежуток, разделяющий верхние и нижние суммы Дарбу (рис.14.3a).
2. На сегменте $[m(b - a), M(b - a)]$ есть единственная точка, разделяющая верхние и нижние суммы Дарбу (рис.14.3b).

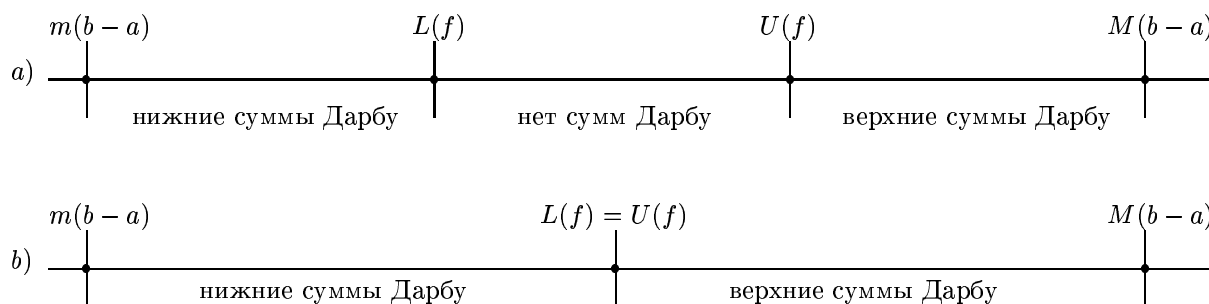


Рис.14.3

Справедлива следующая

Теорема. Если f – вещественная кусочно непрерывная на $[a, b]$ функция, то существует единственное число $L(f) = U(f)$, удовлетворяющее неравенству

$$L(f, P) \leq L(f) = U(f) \leq U(f, P)$$

при любом разбиении P .

Это число называют *интегралом Римана* функции f по сегменту $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f.$$

Не имея возможности в рамках нашего курса доказать эту теорему, покажем, что требование кусочной непрерывности функции существенно. Рассмотрим один "патологический" пример – так называемую функцию Дирихле:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

График этой функции можно представить себе так: следует "вынуть" из отрезка $[0, 1]$ числовой оси все точки с рациональными координатами и поднять эти точки вверх на одну единицу длины. Получатся два "дырявых" отрезка (рис. 14.4).

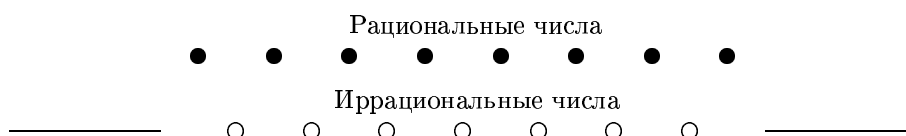


Рис.14.4

Возьмем произвольное разбиение сегмента $[0, 1]$. На любом элементарном сегменте J_k этого разбиения найдутся и рациональные, и иррациональные точки, т.е. множество значений функции Дирихле на J_k будет состоять из двух чисел – нуля и единицы. Поэтому $m_k \equiv 0$, $M_k \equiv 1$.

Итак, все нижние суммы Дарбу для функции Дирихле равны нулю, а все верхние – единице. Для этой функции интеграл Римана не существует!

Замечания. 1. Символ

$$\int_a^b f$$

содержит все необходимые сведения об интеграле Римана. Функцию f обычно называют *подынтегральной функцией*, а числа a и b – концы сегмента – *пределами интегрирования* (a – *нижним*, b – *верхним*). Отметим (на всякий случай), что в этом контексте слово "предел" ничего общего с понятием "предел функции" не имеет!

По традиции символ интеграла Римана (или, как его еще до сих пор называют, "определенного интеграла") записывают так:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

а букву x называют "переменная интегрирования". Очевидно, не хуже выглядят записи

$$\int_a^b f(y) dy, \quad \int_a^b f(\mathbb{Y}) d\mathbb{Y}, \quad \int_a^b f(\cdot) d(\cdot), \dots$$

Встречались даже "теоремы" о независимости интеграла от обозначения переменной интегрирования!

2. Исторически интеграл Римана был введен как *предел интегральных сумм*: назовем *рангом разбиения* P число $\lambda(P) = \max_k (x_k - x_{k-1})$ – наибольшую из длин элементарных сегментов этого разбиения, а интегральной суммой – число

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

где ξ_k – какая-нибудь точка на сегменте $[x_{k-1}, x_k]$.

Обратите внимание на то, что при заданном разбиении можно построить сколько угодно интегральных сумм, варьируя точки ξ_k , в которых вычисляются значения функции.

Имеет место

Теорема. Пусть f кусочно непрерывна на сегменте. Тогда для всякого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ , что при любом разбиении, ранг которого меньше, чем δ , все интегральные суммы отличаются от интеграла Римана меньше, чем на ε , т.е.

$$\lambda(P) < \delta \implies \left| S(f, P) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Этот любопытный факт мы в дальнейшем использовать не будем.

3. В математике существуют другие конструкции, в названии которых присутствует слово "интеграл" (интеграл Лебега, интеграл Радона...). Поскольку в нашем курсе рассматривается только интеграл Римана, мы будем позволять себе говорить просто "интеграл", подразумевая интеграл Римана. Кроме того, если не оговорено противное, мы будем считать по умолчанию, что подынтегральная функция – вещественная.

4. Если $f = \text{const}$, то при любом разбиении P сегмента $[a, b]$ $L(f, P) = U(f, P) = \text{const} \cdot (b - a)$ и, следовательно,

$$\int_a^b \text{const} = \text{const} \cdot (b - a).$$

14.2. Содержательные интерпретации интеграла

В этом пункте мы рассмотрим три содержательные задачи, приводящие к интегралу.

Задача 1. Электрический заряд распределен вдоль стержня длины L с линейной плотностью ρ (кулонов на метр). Найти полный заряд стержня.

Совместим начало координат с началом стержня. Тогда конец стержня будет иметь координату $x = L$, и по условию задачи на сегменте $[0, L]$ будет определена вещественная функция $x \rightarrow \rho(x)$. Будем считать ее кусочно непрерывной (нам не удалось придумать реальную физическую задачу, где это условие не выполнено).

Возьмем произвольное разбиение сегмента $[0, L]$

$$P = \{0 = x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n = L\}.$$

$$J_k = [x_{k-1}, x_k]; \quad m_k = \inf_{x \in J_k} \{\rho(x)\}; \quad M_k = \sup_{x \in J_k} \{\rho(x)\}; \quad k = 1, \dots, n.$$

Верхняя сумма Дарбу $U(\rho, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$ может рассматриваться как полный заряд стержня при кусочно постоянной плотности распределения (на каждом элементарном сегменте J_k плотность постоянна и равна M_k). Аналогично, нижнюю сумму Дарбу можно рассматривать как полный заряд стержня с кусочно постоянной плотностью распределения, но теперь на каждом элементарном сегменте плотность распределения заряда равна m_k .

Очевидно (для физика) неравенство, которому должно удовлетворять число Q (заряд стержня) при любом разбиении P

$$L(\rho, P) \leq Q \leq U(\rho, P).$$

Однако известно, что существует *единственное* число, обладающее таким свойством, и это число – интеграл от функции ρ по сегменту $[0, L]$. Таким образом,

$$Q = \int_0^L \rho.$$

Задача 2. Плоская фигура ограничена осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком неотрицательной непрерывной функции f (рис.14.5). Найти площадь этой "криволинейной трапеции".

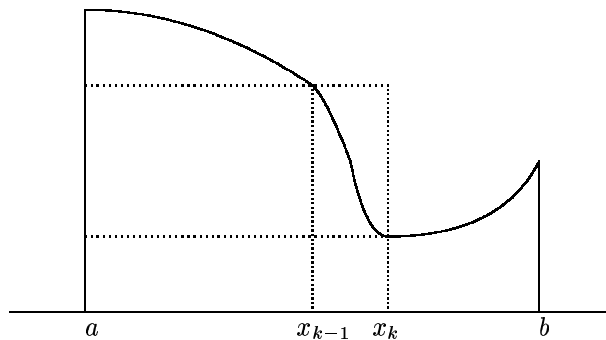


Рис.14.5

Возьмем произвольное разбиение сегмента $[a, b]$

$$P = \{a = x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n = b\}.$$

Верхняя сумма Дарбу функции f для этого разбиения может быть истолкована как площадь "ступенчатой фигуры", составленной из прямоугольников, основаниями которых служат элементарные сегменты разбиения, а высотами – наибольшие ординаты графика на этих сегментах. Аналогично, нижняя сумма Дарбу – площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников с теми же основаниями, но высоты теперь – наименьшие ординаты графика.

Очевидно (для геометра) неравенство, которому должно удовлетворять число S (площадь фигуры) при любом разбиении P

$$L(f, P) \leq S \leq U(f, P).$$

Однако известно, что существует *единственное* число, обладающее таким свойством, и это число – интеграл от функции f по сегменту $[a, b]$. Таким образом,

$$S = \int_a^b f.$$

Задача 3. Задан кусочно гладкий путь $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Найти длину этого пути.

Возьмем произвольное разбиение сегмента $[a, b]$

$$P = \{t_a = t_0, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n = t_b\}.$$

Если бы на $J_k = [t_{k-1}, t_k]$ скорость r' была постоянной, то, очевидно, длина пути, пройденного с момента t_{k-1} до момента t_k , была бы равна $\|r'\| \cdot (t_k - t_{k-1})$. Далее, очевидно (физику!), что истинная длина пути, пройденного с момента t_{k-1} до момента t_k , должна удовлетворять неравенству

$$\inf_{t \in J_k} \{\|r'(t)\|\} \cdot (t_k - t_{k-1}) \leq S_k \leq \sup_{t \in J_k} \{\|r'(t)\|\} \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Складывая такие неравенства по всем $k = 1, \dots, n$, получим неравенство

$$L(\|r'\|, P) \leq S \leq U(\|r'\|, P),$$

которое должно выполняться для любого разбиения P .

Поскольку для *кусочно непрерывной* (по определению кусочно гладкого пути) функции $\|r'\|$ этому неравенству удовлетворяет только интеграл Римана, мы приходим к формуле

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \|r'\| = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{(r'_1)^2 + (r'_2)^2 + (r'_3)^2}. \quad (14.2.1)$$

Замечание. Если отображение r задает гладкую кривую, длина пути называется также *длиной кривой*.

Пример. Как известно, график непрерывно дифференцируемой функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая кривая (см. пример в п.11.2). Для этого случая формула (14.2.1) переписется так

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Рассмотренные примеры демонстрируют, как различные по содержанию *прикладные задачи* сводятся к одной и той же *математической модели* – интегралу Римана.

14.3. Простейшие свойства интеграла

1. Из определения интеграла следует, что нижний предел интегрирования (левый конец сегмента) должен быть *меньше* верхнего предела (правого конца сегмента). Чтобы освободиться от этого стеснительного условия, при любой функции f полагают *по определению*

$$\int_a^a f = 0 \quad (14.3.1)$$

f (заряд стержня нулевой длины естественно считать равным нулю).

2. Если $a > b$, то также *по определению* полагают

$$\int_a^b f = - \int_b^a f. \quad (14.3.2)$$

Доказательства следующих двух свойств не приводятся из-за их технической сложности, но мы рекомендуем читателю интерпретировать эти свойства физически (на примере заряженного стержня) и геометрически (на примере площади криволинейной трапеции).

3. Если функция f кусочно непрерывна на сегменте $[a, c]$, а точка b лежит на этом сегменте, то

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \quad (14.3.3)$$

("Если заряженный стержень разрезать на части, то заряд всего стержня равен сумме зарядов его частей". Не примите эту фразу за доказательство!)

Учитывая определения (14.3.1) и (14.3.2), можно распространить формулу (14.3.3) на случай *произвольного* расположения точек на числовой оси (лишь бы f была кусочно непрерывна на всех участвующих в равенстве сегментах).

4. Если функции f_1 и f_2 кусочно непрерывны на $[a, b]$, то при любых числах α_1 и α_2

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \cdot \int_a^b f_1 + \alpha_2 \cdot \int_a^b f_2. \quad (14.3.4)$$

Это равенство позволяет назвать интеграл Римана *линейным* функционалом, определенном на множестве функций, кусочно непрерывных на $[a, b]$.

5. Интеграл не изменится, если произвольно изменить значения подынтегральной функции в *конечном* числе точек сегмента.

Доказательство. Рассмотрим функцию ϕ_c , равную единице в точке c сегмента $[a, b]$, а в остальных точках этого сегмента равную нулю. При любом разбиении сегмента наименьшее значение ϕ_c на каждом элементарном сегменте будет равно нулю, т.е. будут равны нулю все нижние суммы Дарбу. Следовательно, будет равна нулю и верхняя грань множества нижних сумм Дарбу (она же – интеграл Римана от функции ϕ_c). Итак,

$$\int_a^b \phi_c = 0.$$

Пусть теперь f – произвольная функция, кусочно непрерывная на $[a, b]$. Изменим ее значение в точке $c \in [a, b]$ на величину A . Получим новую функцию $g = f + A \cdot \phi_c$. Далее, вследствие линейности интеграла,

$$\int_a^b g = \int_a^b f + A \int_a^b \phi_c = \int_a^b f.$$

Распространение доказательства на случай изменения значений функции в нескольких точках очевидно.

Замечание. Это свойство дает основание интегрировать кусочно непрерывные функции, *не определенные в конечном числе точек сегмента* (результат, очевидно, не зависит от способа доопределения). Например, можно вычислять интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx,$$

хотя подынтегральная функция не определена в нуле (но имеет там конечный предел).

14.4. Среднее значение функции на сегменте

Определение. Средним значением кусочно непрерывной функции f на сегменте $[a, b]$ называется число

$$f_{cp} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < 1; \\ 2 & \text{при } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ Тогда

$$f_{cp} = \frac{1}{2-0} \cdot \int_0^2 f = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 1 + \int_1^2 2 \right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}.$$

Отметим, что в этом примере множество значений подынтегральной функции состоит из двух чисел – единицы и двойки. Таким образом, среднее значение функции не является ее значением!

Ситуация меняется, если функция непрерывна.

Теорема. Если функция f непрерывна на сегменте, то ее среднее значение является ее значением. Точнее, найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = f_{cp}$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса среди значений непрерывной на $[a, b]$ функции f есть наибольшее (M) и наименьшее (m). По определению интеграла

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a) \quad \text{или} \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M, \quad \text{или} \quad m \leq f_{cp} \leq M,$$

т.е. среднее значение непрерывной функции лежит на сегменте $[m, M]$. А по теореме Коши все числа этого сегмента – значения функции f . Следовательно, среднее значение непрерывной функции является ее значением.

Эту теорему обычно называют *теоремой о среднем* и пишут

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a) \quad (\xi - \text{некоторая точка на } [a, b]).$$

Замечания. 1. Мы выделили слово "некоторая", чтобы подчеркнуть, что теорема о среднем лишь утверждает существование такой точки, но не дает алгоритм ее отыскания.

2. Предполагалось, что $a < b$. Однако легко видеть, что утверждение теоремы сохраняется и при $a > b$.

14.5. Интегрирование неравенств

Теорема. Если $f \geq 0$ и $a < b$, то $\int_a^b f \geq 0$.

Доказательство. Если $f \geq 0$, то $m = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \geq 0$, и по определению интеграла

$$\int_a^b f \geq m(b-a) \geq 0.$$

Следствия. 1. Если f_1 и f_2 – вещественные функции, кусочно непрерывные на $[a, b]$, $f_1 \geq f_2$ и $a < b$, то $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$.

Доказательство.

$$f_1 \geq f_2 \implies f_1 - f_2 \geq 0 \implies \int_a^b (f_1 - f_2) \geq 0 \implies \int_a^b f_1 \geq \int_a^b f_2.$$

2. По определению модуля вещественного числа

$$-|f| \leq f \leq |f|.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad \text{или} \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Замечание. Если нижний предел интегрирования больше верхнего, то при интегрировании неравенства его знак меняется!

14.6. Интеграл от комплекснозначной функции

Всякую функцию $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ можно представить в виде $f = f_1 + i \cdot f_2$, где f_1 и f_2 – вещественные функции:

$$f_1(x) = \operatorname{Re}(f(x)), \quad f_2(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Эти функции естественно обозначать $\operatorname{Re}(f)$ и $\operatorname{Im}(f)$ соответственно.

Если $\operatorname{Re}(f)$ и $\operatorname{Im}(f)$ кусочно непрерывны на $[a, b]$, положим по определению

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f).$$

Докажем, что для комплекснозначной функции f справедливо неравенство (сравните со следствием 2 в п.14.5).

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \quad (14.6.1)$$

Обозначим $A = \int_a^b \operatorname{Re}(f)$, $B = \int_a^b \operatorname{Im}(f)$. Тогда $\int_a^b f = A + i \cdot B$.

$$\left| \int_a^b f \right|^2 = A^2 + B^2 = A \cdot \int_a^b \operatorname{Re}(f) + B \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(f) = \int_a^b (A \cdot \operatorname{Re}(f) + B \cdot \operatorname{Im}(f)).$$

Но по неравенству Коши-Буняковского-Шварца

$$\begin{aligned} A \cdot \operatorname{Re}(f(x)) + B \cdot \operatorname{Im}(f(x)) &\leq \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{\operatorname{Re}^2(f(x)) + \operatorname{Im}^2(f(x))} \leq \\ &\leq \sqrt{A^2 + B^2} \cdot |f(x)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| \int_a^b f \right|^2 \leq \int_a^b (\sqrt{A^2 + B^2} \cdot |f|).$$

Сокращая на $\left| \int_a^b f \right| = \sqrt{A^2 + B^2}$, получим $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

14.7. Интеграл с переменными пределами. Первообразная функция

Если f кусочно непрерывна на $[a, b]$, то она кусочно непрерывна на любом сегменте, содержащемся в $[a, b]$. Зафиксируем точку $c \in [a, b]$ и определим при всех $x \in [a, b]$ новую функцию

$$F(x) = \int_c^x f, \quad (14.7.1)$$

называемую *интеграл с переменным верхним пределом*.

Установим некоторые свойства интеграла с переменным верхним пределом (14.7.1).

1. F непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $x, y \in [a, b]$ и $x < y$. Тогда

$$F(y) - F(x) = \int_c^y f - \int_c^x f = \int_x^y f.$$

Если $M = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\}$, то $|f| \leq M$. Поэтому

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq \int_x^y M = M \cdot (y - x).$$

Пусть теперь ε – произвольное положительное число. Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, получим

$$|y - x| = y - x < \delta \implies |F(y) - F(x)| \leq M \cdot \delta = \varepsilon.$$

Доказана непрерывность *справа* функции F в любой точке $x \in [a, b[$ и непрерывность ее *слева* в любой точке $x \in]a, b]$, т.е. непрерывность F на $[a, b]$.

2. Если f непрерывна в точке $x \in]a, b[$, то $F'(x) = f(x)$ (это утверждение называют теоремой Барроу²).

Доказательство. Кусочно непрерывная функция f по определению может иметь на $[a, b]$ лишь конечное множество точек разрыва первого рода. Пусть точка y выбрана так, что на $[x, y]$ (или на $[y, x]$) f непрерывна.

Тогда по теореме о среднем между x и y найдется такая точка ξ , что $\int_x^y f = f(\xi) \cdot (y - x)$. Следовательно,

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f = f(\xi) \cdot (y - x) \quad \text{или} \quad \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(\xi).$$

²Исаак БАРРОУ (1630-1677) – английский математик и богослов. Учитель И. Ньютона.

Переходим к пределу, учитывая, что ξ лежит между x и y , а f непрерывна в точке x :

$$F'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Итак, если f кусочно непрерывна на $[a, b]$, то функция F , определенная равенством (14.7.1), непрерывна во всех точках $[a, b]$, а в точках, где f непрерывна, F имеет производную, причем $F'(x) = f(x)$.

Определение. Если f *кусочно непрерывна* на некотором промежутке, то всякая *непрерывная* на этом промежутке функция, производная которой в точках непрерывности f совпадает с f , называется *первообразной функцией* для функции f .

Примеры. 1. Как было показано выше, интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная (обычно говорят не "первообразная функция", а "первообразная") для подынтегральной функции.

2. Пусть f кусочно непрерывна на $[a, b]$. Зафиксируем точку $d \in [a, b]$ и определим при всех $x \in [a, b]$ функцию *интеграл с переменным нижним пределом*

$$\Phi(x) = \int_x^d f, \quad (14.7.2)$$

Легко видеть, что функция

$$-\Phi(x) = \int_d^x f$$

– интеграл с переменным верхним пределом. Поэтому интеграл с переменным нижним пределом – также первообразная для подынтегральной функции.

3. Функция

$$abs(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0 \\ x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

– первообразная для функции $sign$, ибо она всюду непрерывна, и $abs'(x) = sign(x)$ при $x \neq 0$.

Заметим, что вообще первообразная для полиномиального сплайна сама является полиномиальным сплайном.

Легко видеть, что первообразная у кусочно непрерывной функции не единственна. Так, прибавляя к первообразной F функцию-константу, мы получаем новую первообразную, так как $F + const$ непрерывна и $(F + const)' = F'$.

Однако произвол в выборе первообразной этим и ограничивается.

Теорема. Разность двух первообразных кусочно непрерывной функции есть функция-константа.

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 – первообразные для f на некотором промежутке. Рассмотрим их разность $F = F_1 - F_2$ и покажем сначала, что она постоянна на интервалах непрерывности f .

Действительно, для любых двух точек $x_1 < x_2$ из интервала непрерывности f формула конечных приращений (п. 10.2) дает

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) = (F_1'(\xi) - F_2'(\xi)) \cdot (x_2 - x_1) = f(\xi) - f(\xi) = 0$$

(здесь ξ – некоторая точка из $]x_1, x_2[$).

Итак, F *кусочно постоянна* на промежутке. Но поскольку она непрерывна (как разность непрерывных функций), она *постоянна*!

Интегралы с переменными пределами часто используются как способ задания функций.

Примеры. 1. "Функция ошибок" $erf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

2. "Интегральный синус" $Si : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

3. "Интегралы Френеля"³ $S, C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt.$$

Замечание. Приведенные в этих примерах функции не выражаются через "школьные" (которые принято называть "элементарными") с помощью конечного числа арифметических операций и композиций. По этой причине их уважительно именуют "специальными функциями". Такое деление функций на элементарные и специальные не представляется сегодня оправданным. На самом деле все функции можно разделить на две группы:

- 1) полиномы и рациональные дроби, непосредственно вычисляемые компьютером;
- 2) функции, аппроксимируемые полиномами и рациональными дробями.

Отношение конкретного пользователя к функциям из второй группы определяется его конкретной "вооруженностью": знанием свойств функции и наличием программных средств для эффективного вычисления ее значений. При таком подходе интегральный синус ничем не хуже обычного "школьного" синуса.

Мы рекомендуем читателю ознакомиться с книгой под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган "Справочник по специальным функциям", М.: Наука, 1979. Такие среды конечного пользователя, как MAPLE, MATHEMATICA, "знают" все приведенные в этой книге функции, умеют вычислять их значения с заданной пользователем точностью и даже выполняют над ними многие "аналитические" операции (вычисляют пределы, дифференцируют и т.п.)

14.8. Теорема Ньютона-Лейбница. Формальное интегрирование

Теорема Ньютона-Лейбница. Если f кусочно непрерывна на $[a, b]$ и Ψ – какая-нибудь ее первообразная, то

$$\int_a^b f = \Psi(b) - \Psi(a). \quad (14.8.1)$$

(Вместо $\Psi(b) - \Psi(a)$ пишут также $\Psi \Big|_a^b$).

Доказательство. По теореме Барроу $\int_a^x f$ – одна из первообразных для f . Поэтому $\Psi(x) = \int_a^x f + \text{const}$.

Положив $x = a$, получим $\text{const} = \Psi(a)$ и $\int_a^x f = \Psi(x) - \Psi(a)$. Положив здесь $x = b$, получим формулу (14.8.1), которая называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Интеграл от кусочно непрерывной функции по сегменту равен приращению любой первообразной этой функции на этом сегменте.

Формула Ньютона-Лейбница сводит задачу о вычислении интеграла к отысканию первообразной для подынтегральной функции и вычислению приращения этой первообразной на сегменте интегрирования. Этот путь вычисления интеграла мы будем называть "формальным интегрированием". Дело в том, что при отсутствии нужной первообразной в справочнике нет иного алгоритма ее отыскания, кроме представления ее в виде интеграла с переменным пределом! (Мы, естественно, не считаем алгоритмом фразу из известного учебника элементарной математики "... а теперь надо догадаться..."). Тем не менее опишем два приема преобразования интеграла, иногда помогающие выполнить формальное интегрирование.

Прием 1. Интегрирование по частям. Так именуют прием, основанный на известном правиле дифференцирования произведения

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'.$$

Отсюда следует равенство интегралов

$$\int_a^b (f_1 \cdot f_2)' = \int_a^b f_1' \cdot f_2 + \int_a^b f_1 \cdot f_2'. \quad (14.8.2)$$

³Огюстен Жан ФРЕНЕЛЬ (1788-1827) – французский инженер, физик и математик, член Парижской АН.

Учитывая, что первообразной для функции $(f_1 \cdot f_2)'$ является $f_1 \cdot f_2$, и применяя к левой части равенства (14.8.2) формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$(f_1 \cdot f_2)(b) - (f_1 \cdot f_2)(a) = \int_a^b f_1' \cdot f_2 + \int_a^b f_1 \cdot f_2',$$

откуда и вытекает правило интегрирования "по частям":

$$\boxed{\int_a^b (f_1 \cdot f_2') = (f_1 \cdot f_2) \Big|_a^b - \int_a^b (f_1' \cdot f_2)}. \quad (14.8.3)$$

Отметим, что интегрирование "по частям" позволяет не *вычислить* интеграл, а лишь *заменить* вычисление одного интеграла на вычисление другого. Если пользователь умеет вычислять этот другой, то применение интегрирования "по частям" оправдано.

Рассмотрим технологию интегрирования "по частям" на примерах.

Примеры. 1. $\int_a^b x \cdot \exp(x) dx$. Пусть

$$f_1(x) = x, \quad f_2'(x) = \exp(x). \quad \text{Тогда} \quad f_1'(x) \equiv 1, \quad f_2(x) = \exp(x).$$

По формуле (14.8.3)

$$\int_a^b x \cdot \exp(x) dx = x \cdot \exp(x) \Big|_a^b - \int_a^b 1 \cdot \exp(x) dx.$$

Мы свели вычисление одного интеграла $-\int_a^b x \cdot \exp(x) dx$ к вычислению другого $-\int_a^b \exp(x) dx$, у которого известна первообразная для подынтегральной функции. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_a^b \exp(x) dx = \exp(x) \Big|_a^b.$$

Итак,

$$\int_a^b x \cdot \exp(x) dx = x \cdot \exp(x) \Big|_a^b - \exp(x) \Big|_a^b = (b-1) \cdot \exp(b) - (a-1) \cdot \exp(a).$$

2. $\int_1^2 \ln(x) dx$. Положим

$$f_1(x) = \ln(x), \quad f_2'(x) \equiv 1. \quad \text{Тогда} \quad f_1'(x) = \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = x.$$

$$\int_1^2 \ln(x) dx = \ln(x) \cdot x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x dx.$$

Мы опять не вычислили интеграл, а заменили его другим. Но этот другой (интеграл от функции-константы) легко вычисляется:

$$\int_1^2 1 = 1 \cdot (2-1) = 1. \quad \text{Итак,}$$

$$\int_1^2 \ln(x) dx = (\ln(2) \cdot 2 - \ln(1) \cdot 1) - 1 = 2\ln(2) - 1.$$

Прием 2. Подстановка (иногда говорят "замена переменной", но мы не пользуемся этим историческим названием.)

Пусть непрерывно дифференцируемая функция φ взаимно однозначно отображает сегмент $[\alpha, \beta]$ на сегмент $[a, b]$. Найдем такую непрерывную функцию $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, чтобы для всех $t \in [\alpha, \beta]$ выполнялось равенство

$$\int_{\alpha}^t \psi = \int_a^{\varphi(t)} f.$$

Дифференцируя это тождество, получим

$$\psi(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \text{или} \quad \psi = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Итак,

$$\int_{\alpha}^t (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_a^{\varphi(t)} f.$$

Полагая $t = \beta$ ($\varphi(\beta) = b$), получаем правило подстановки:

$$\boxed{\int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Дадим физическую интерпретацию этого правила. Будем трактовать интеграл $\int_a^b f$ (число!) как величину электрического заряда, распределенного по стержню $[a, b]$ с непрерывной линейной плотностью f . Подвергнем этот стержень деформации, т.е. зададим непрерывно дифференцируемую функцию φ , взаимно однозначно отображающую сегмент $[\alpha, \beta]$ на сегмент $[a, b]$, причем $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ (рис.14.7).

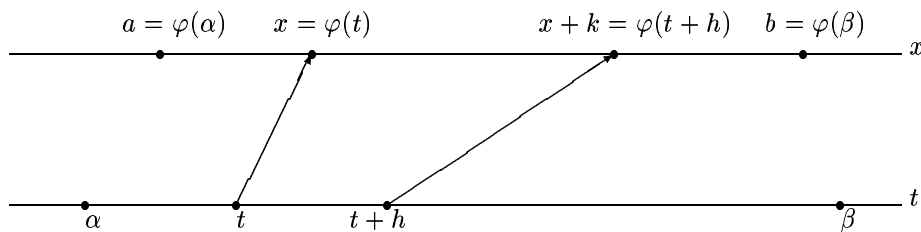


Рис.14.7

Заряд стержня при такой деформации сохраняется, а плотность его распределения вдоль стержня изменится. Обозначим новую плотность ψ . Отрезок стержня $[t, t + h]$ преобразуется при деформации в отрезок $[x, x + k]$. Пусть q – заряд отрезка $[t, t + h]$ (он же заряд отрезка $[x, x + k]$). Запишем выражения для средних плотностей заряда $\psi_{cp} = \frac{q}{h}$ (на отрезке $[t, t + h]$) и $f_{cp} = \frac{q}{k}$ (на отрезке $[x, x + k]$). Отсюда

$$\psi_{cp} = f_{cp} \cdot \frac{k}{h} = f_{cp} \cdot \frac{\varphi(t + h) - \varphi(t)}{h}.$$

По теореме о среднем $\psi_{cp} = \psi(\tau)$, $f_{cp} = f(\xi)$, где τ и ξ – некоторые точки на сегментах $[t, t + h]$ и $[x, x + k]$ соответственно. Переходя к пределу ($h \rightarrow 0$), получим (вследствие непрерывности функций f и ψ)

$$\psi(t) = f(x) \cdot \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t).$$

Замечание. Подстановка (как и интегрирование "по частям") лишь преобразует один интеграл в другой. Искусство пользователя состоит в выборе такой подстановки, в результате которой получится "табличный" интеграл.

Примеры. 1. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad a > 0.$

Функция $x = a \cdot \sin(t)$ взаимно однозначно отображает сегмент $[0, \frac{\pi}{2}]$ на сегмент $[0, a]$ и непрерывно дифференцируема. Поэтому

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a \cdot \sin(t))^2} \cdot (a \cdot \sin(t))' dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt.$$

Пока что мы только заменили один интеграл другим. Но известная из школы формула $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ дает

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} 1 dt + \int_0^{\pi/2} \cos(2t) dt \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(2t)}{4} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4}$ (заметьте, что мы вычислили площадь четвертой части круга с радиусом a .)

2. $\int_0^2 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$. Отметим, что хотя подынтегральная функция не определена в нуле, это не мешает инте-

гралу существовать в силу наличия конечного правого предела: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Функция $x = \frac{\pi}{2} t^2$ взаимно однозначно отображает сегмент $[0, \frac{2}{\sqrt{\pi}}]$ на сегмент $[0, 2]$ и непрерывно дифференцируема. Поэтому

$$\int_0^2 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} t^2)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} t^2}} (\frac{\pi}{2} t^2)' dt = \sqrt{2\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt.$$

Опять мы лишь преобразовали один интеграл в другой. Но если пользователь знает о существовании функции $S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt$, называемой интегралом Френеля (мы о ней упоминали в п. 14.7), то ситуация меняется:

$$\int_0^2 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt = \sqrt{2\pi} S\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Серьезное предупреждение. Этот пример показывает, что успех формального интегрирования зависит от тезауруса пользователя (который, конечно, следует расширять) и от его искусства, которое приобретает лишь долгой тренировкой и дается далеко не всем.

Существуют достаточно богатые таблицы первообразных, называемых по старинке "неопределенными интегралами" и даже интегралов с типичными пределами интегрирования. Наиболее полные из них:

- И.С. Градштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука. М.: 1971;
- А.П. Прудников и др. Интегралы и ряды. Наука, М.: 1981;
- А.П. Прудников и др. Интегралы и ряды (специальные функции). Наука, М.: 1983;
- А.П. Прудников и др. Интегралы и ряды (дополнительные главы). Наука, М.: 1986;

Следует учесть, что роль этих превосходных таблиц в наше время уменьшается, так как основное их содержание реализовано в таких средах конечного пользователя, как MATHEMATICA и MAPLE, которые "умеют" и выполнять формальное интегрирование и находить значение интеграла – число – с заданной пользователем точностью.

Мы считаем, что "цивилизованный пользователь" должен помнить несколько простейших первообразных, уметь грамотно провести интегрирование "по частям" и подстановку, но отнюдь не должен владеть искусством подбора подходящих путей преобразования интеграла.

Следует научиться работать с поименованными выше таблицами и средами конечного пользователя, а в сложных случаях – консультироваться со специалистами.

14.9. Численное интегрирование

В реальных задачах обычно требуется найти не сам интеграл (число), а некоторую его оценку, т.е. интервал достаточно малой длины, гарантированно покрывающий это число. Один из способов получения оценки интеграла мы опишем.

Для оценки интеграла $\int_a^b f$ подынтегральная функция заменяется некоторой функцией ϕ , которая должна удовлетворять двум требованиям:

- 1) должна быть известна ее первообразная, чтобы можно было применить формулу Ньютона-Лейбница;
- 2) абсолютная погрешность от замены интеграла от f на интеграл от ϕ не должна превышать заданное положительное число ε .

$$R = \left| \int_a^b f - \int_a^b \phi \right| \leq \varepsilon.$$

В качестве аппроксимирующей функции часто употребляются полиномиальные сплайны. При этом $\int_a^b f$ оказывается линейной комбинацией значений подынтегральной функции в узлах стандартной сетки и со стандартными коэффициентами. Эту линейную комбинацию называют *квадратурной формулой*.

Проиллюстрируем изложенное на простейшем примере. Возьмем на $[a, b]$ равномерную сетку

$$x_k = a + k \cdot h \quad (k = 0, \dots, n), \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Вычислим значения подынтегральной функции в середине каждого сегмента $J_k = [x_{k-1}, x_k]$ и построим кусочно постоянный сплайн

$$Spl_k(x) = f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \quad \text{при } x \in J_k.$$

Заметим, что согласно теореме из п. 14.4 значения сплайна в узлах сетки не влияют на значения интеграла. Вычислим интеграл от построенного сплайна

$$\int_a^b Spl = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} Spl_k = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) dx = h \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right).$$

Итак, мы получили квадратурную формулу

$$\int_a^b f \sim \int_a^b Spl = h \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right), \quad (14.9.1)$$

которая из-за ее очевидной геометрической интерпретации называется *формулой средних прямоугольников*.

Напоминаем, что значок \sim читается "заменяется на". Мы обращаем внимание читателя на бессмысленность часто употребляющегося выражения "приближенное равенство".

Осталось оценить погрешность квадратурной формулы. И, хотя интеграл Римана определен для всех кусочно непрерывных функций, эффективную оценку погрешности можно получить только при существенном ужесточении требований к подынтегральной функции. Мы потребуем теперь наличия у нее *непрерывной второй производной*! Обозначим

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} \{|f''(x)|\}, \quad M_2^{(k)} = \max_{x \in J_k} \{|f''(x)|\}.$$

Очевидно, что $M_2^{(k)} \leq M_2$ для всех k . Пусть $x \in]x_{k-1}, x_k[$. По формуле Тейлора

$$f(x) = f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f'\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + \frac{f''(\xi(x))}{2!} \cdot \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^2,$$

где $\xi(x)$ – некоторая (неизвестная) точка на интервале $]x_{k-1}, x_k[$. Отсюда

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f - Spl_k) = f'\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) dx +$$

$$+ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi(x))}{2!} \cdot \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^2 dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi(x))}{2!} \cdot \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^2 dx$$

(убедитесь в том, что $\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) dx = 0$.) Далее

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f - Spl_k) \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(\xi(x)) \cdot \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^2 dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(\xi(x))| \cdot \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^2 dx \leq \frac{M_2^{(k)}}{2} \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^2 dx = \\ &= \frac{M_2^{(k)}}{6} \cdot \left(x - \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^3 \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{M_2^{(k)} h^3}{24} = \frac{M_2^{(k)} (b-a)^3}{24n^3}. \end{aligned}$$

И, наконец,

$$\begin{aligned} R = \left| \int_a^b (f - Spl) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f - Spl_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f - Spl_k) \right| \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{k=1}^n M_2^{(k)} \leq M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2}. \end{aligned}$$

Нами доказана

Теорема. Если подынтегральная функция имеет непрерывную вторую производную, то

$$\begin{aligned} \int_a^b f \in]S_n - \Delta_n, S_n + \Delta_n[, \quad \text{где} \\ S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right), \quad \Delta_n = M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2}. \end{aligned}$$

Видно, что качество оценки можно улучшать, увеличивая количество точек сетки. При этом, увеличив *вдвое* объем вычислительной работы, мы уменьшаем радиус оценки в *четыре* раза.

Замечания. 1. Полученная оценка работает при наличии у подынтегральной функции *непрерывной второй производной*. Можно показать, что при наличии у подынтегральной функции только *непрерывной первой производной* оценка ухудшается:

$$\Delta_n = M_1 \cdot \frac{(b-a)^3}{24n}, \quad \left(M_1 = \max_{x \in [a, b]} \{|f'(x)|\} \right).$$

Теперь в знаменателе первая степень числа узлов сетки вместо второй, т.е. увеличив *вдвое* объем вычислительной работы, мы уменьшаем радиус оценки *только в два* раза!

Поскольку обычно приходится интегрировать кусочно аналитические функции, имеющие на сегменте лишь несколько особых точек, целесообразно применять квадратурную формулу не ко всему сегменту сразу, а оценивать интегралы по каждому из отрезков аналитичности подынтегральной функции в отдельности.

2. Получение оценки погрешности квадратурной формулы связано с необходимостью находить наибольшее значение (или какую-нибудь верхнюю границу) модуля второй производной (для метода средних прямоугольников) или производной более высокого порядка (для некоторых других методов). Поэтому стандартные программы численного интегрирования используют так называемые апостериорные (получаемые в процессе вычислений) оценки погрешности. Простейший способ состоит в последовательном удвоении количества узлов сетки. При этом сравнивают "соседние" результаты, полученные по квадратурной формуле (S_2 с S_4 ; S_4 с S_8 и т.д.) Процесс заканчивается при выполнении неравенства $|S_n - S_{2n}| < \varepsilon$ (абсолютная погрешность) или неравенства $|S_n - S_{2n}| < \varepsilon \cdot |S_{2n}|$ (относительная погрешность).

Фортран-библиотеки (NAG, IMSL) содержат большое количество процедур, позволяющих получать как правило (если подынтегральная функция не очень плохая) достоверные оценки интегралов. Среды конечного

пользователя (MATHEMATICA, MAPLE, MATLAB) позволяют получать оценки интегралов, не прибегая к помощи алгоритмического языка.

Серьезное предупреждение. Необходимо помнить, что при отсутствии *априорных* оценок (основанных на знании верхних границ модуля производных) гарантировать достоверность результатов нельзя. Справедливо утверждение: для любого алгоритма численного интегрирования, основанного на *апостериорных* оценках, можно построить пример, на котором этот алгоритм "сломается".

Построим такой пример для метода средних прямоугольников. Требуется оценить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(32x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(64x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(2\pi - \frac{1}{64} \sin(64x) \Big|_0^{2\pi} \right) = \pi.$$

Начинаем вычисления по квадратурной формуле, удваивая количество узлов сетки.

$$S_2 = \frac{2\pi}{2} \cdot \left(\sin\left(32 \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(32 \frac{3\pi}{2}\right) \right) = 0.$$

$$S_4 = \frac{2\pi}{4} \cdot \left(\sin\left(32 \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(32 \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(32 \frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(32 \frac{7\pi}{4}\right) \right) = 0.$$

Два "соседних" результата совпали, и программа выдаст ответ: "ноль!". Даже если мы (на всякий случай) еще раз удвоим количество узлов, ответ не изменится: мы опять попадем в точки, где подынтегральная функция равна нулю.