

Глава 11. ФУНКЦИИ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

11.1. Основные определения

Функцией нескольких *вещественных* переменных принято называть отображение части \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m ($n, m \in \mathbb{N}$, $n > 1$), т.е.

$$f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Такую функцию иначе называют *векторным полем*. Схематически векторное поле можно изобразить в виде "черного ящика" с n входами и m выходами (рис.11.1).

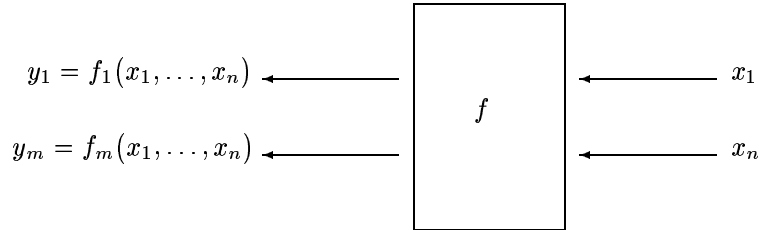


Рис. 11.1

В частном случае ($m = 1$) получается *скалярное поле* (функционал)

$$f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Очевидно, что векторное поле – упорядоченный набор скалярных полей, каждое из которых может изучаться независимо от остальных. Поэтому мы начнем со случая скалярного поля.

Итак, пусть $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть $a = [a_1, \dots, a_n]^T$ – *внутренняя*¹ точка множества X .

Зафиксируем все координаты точки x , кроме k -й, полагая $x_j = a_j$ ($j \neq k$), и рассмотрим функцию одной "оставшейся" переменной x_k (сужение f на прямую, проходящую через точку a параллельно k -й оси координат)

$$\psi_k(x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Производная этой функции, вычисленная при $x_k = a_k$, называется *частной производной функции f в точке a по k -й переменной*.

$$\begin{aligned} D_k f(a) &= \lim_{x_k = a_k} \frac{\psi_k(x_k) - \psi_k(a_k)}{x_k - a_k} = \\ &= \lim_{x_k = a_k} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)}{x_k - a_k} \end{aligned}$$

(конечно, если этот предел существует).

Таким образом, в точке a определяются n чисел: $D_1 f(a), \dots, D_n f(a)$. Их записывают в виде строки, называют эту матрицу-строку *производной* функции (скалярного поля) f в точке a и обозначают $f'(a)$ или $Df(a)$:

$$f'(a) = Df(a) = [D_1 f(a), \dots, D_n f(a)].$$

Если производная существует во всех точках некоторого множества, то мы получаем заданную на этом множестве функцию-строку, которую называют *производной функцией* от функции f .

Пример. Если $f(x) = x_1 x_2^2 x_3^3$, $x \in \mathbb{R}^3$, то

$$D_1 f(x) = x_2^2 x_3^3, \quad D_2 f(x) = 2x_1 x_2 x_3^3, \quad D_3 f(x) = 3x_1 x_2^2 x_3^2,$$

$$f'(x) = Df(x) = [x_2^2 x_3^3, 2x_1 x_2 x_3^3, 3x_1 x_2^2 x_3^2].$$

Если транспонировать производную скалярного поля, то получится вектор (матрица-столбец), который называется *градиентом* скалярного поля. Пишут

$$\text{grad}(f) = \nabla f = (f')^T = [D_1 f, \dots, D_n f]^T.$$

¹Точка $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ называется *внутренней* для X , если она имеет окрестность, состоящую *только* из точек X . Например, во множестве $V = \{x | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ точка $[0, 0.5]^T$ – внутренняя, а точка $[0, 1]^T$ – нет (проверьте это!). Множество $X \subset \mathbb{R}^n$, все точки которого – внутренние, называется открытым в \mathbb{R}^n . Например, множество $U = \{x | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ – открыто в \mathbb{R}^2 (сравните его с множеством V).

Введение двух объектов – производной и градиента оправдано тем, что в одних случаях удобно работать со строкой, а в других – со столбцом.

Определение. Производной (матрицей Якоби) векторного поля $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется $(m \times n)$ -матрица, строки которой – производные компонент этого поля (скалярных полей). Если $f = [f_1, \dots, f_m]^T$, то

$$f' = Df = \begin{bmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & \dots & D_n f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m & D_2 f_m & \dots & D_n f_m \end{bmatrix}.$$

Если матрица Якоби квадратная, то ее определитель называется **якобианом** векторного поля.

Важное соглашение

В дальнейшем мы будем по умолчанию считать, что каждая рассматриваемая нами функция *непрерывно дифференцируема*, т.е. имеет *непрерывную* производную функцию.

Примеры. 1. Пусть A – постоянная $(m \times n)$ -матрица; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax$. Покажите, что $f'(x) = A$. В частности, если $m = 1$, то линейный функционал $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно записать в виде $f(x) = \langle x, a \rangle = a^T x$ где $a \in \mathbb{R}^n$. Соответственно, $f'(x) = a^T$, $\nabla f(x) = a$.

2. Пусть $f : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $x_1 = f_1(\rho, \varphi) = \rho \cdot \cos(\varphi)$; $x_2 = f_2(\rho, \varphi) = \rho \cdot \sin(\varphi)$.

Как известно (п.2.3) это отображение задает переход от полярных координат точки на плоскости к ее декартовым координатам. Вычислим матрицу Якоби и ее определитель (якобиан).

$$D_1 f_1(\rho, \varphi) = \cos(\varphi), \quad D_2 f_1(\rho, \varphi) = -\rho \cdot \sin(\varphi),$$

$$D_1 f_2(\rho, \varphi) = \sin(\varphi), \quad D_2 f_2(\rho, \varphi) = \rho \cdot \cos(\varphi);$$

$$f'(\rho, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \rho \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

$$\det(f'(\rho, \varphi)) = \rho.$$

11.2. Кривая и путь

Рассмотрим две содержательные интерпретации понятий, введенных в предыдущем пункте.

КРИВАЯ. Интуитивное представление о "кривой" (или "линии") можно получить так: возьмем резиновую нить, закрепим один ее конец в точке A , другой – в точке B , и растягивая нить, сделаем из нее нужную нам "кривую".

В соответствии с этим представлением естественно назвать кривой образ сегмента $[a, b]$ при *непрерывном* отображении

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \quad \begin{cases} x_1 = r_1(t) \\ x_2 = r_2(t) \\ x_3 = r_3(t) \end{cases}. \quad (11.2.1)$$

Однако вряд ли кто-нибудь согласится считать "линией" квадрат, а между тем существует непрерывное отображение сегмента $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ (так называемая *кривая Пеано*²).

Имея в виду цели нашего курса, мы ограничимся рассмотрением *гладких* кривых, исключающих подобные патологии.

Определение. Гладкой *ориентированной* кривой называют множество значений непрерывно дифференцируемого отображения $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, если

- 1) $r'(t) \neq \theta_3$ (производная отображения r *нигде* не обращается в нуль) и
- 2) $r(t_1) = r(t_2) \implies t_1 = t_2$ (нет самопересечений).

На рис.11.2 схематически изображена кривая – множество значений отображения

$$r : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Здесь $A = r(a)$, $B = r(b)$, $T = r(t)$ ($a \leq t \leq b$).

²Джузеппе ПЕАНО (1858-1932) – итальянский математик, член Туринской АН.

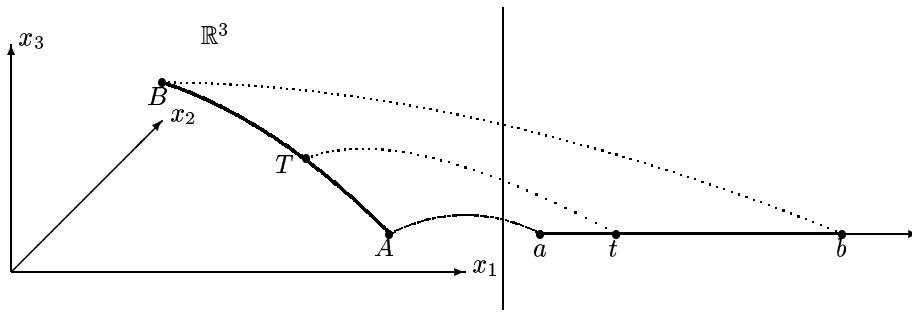


Рис. 11.2

Пример. Кривая, заданная отображением

$$r(t) = a + (b - a) \cdot t, \quad a, b \in \mathbb{R}^3, \quad (a \neq b), \quad t \in [0, 1]$$

– это отрезок прямой, соединяющей точки a и b (рис.11.3).

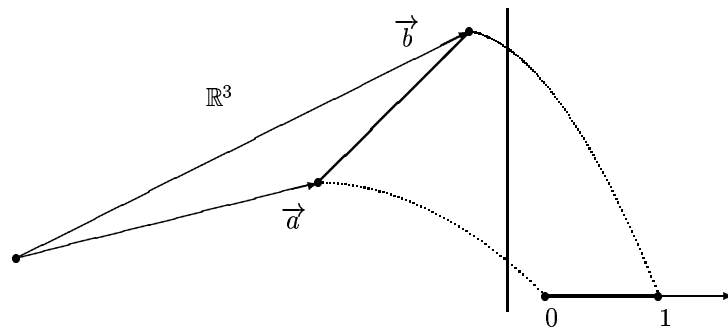


Рис. 11.3

Замечания. 1. Точка $A = r(a)$ называется *началом* ориентированной кривой, точка $B = r(b)$ – ее *концом*.

2. Условие взаимной однозначности отображения (условие 2 из определения) может нарушаться на концах сегмента $[a, b]$. В этом случае $A = r(a) = r(b) = B$, и такая кривая называется *замкнутой*.

3. Можно рассматривать отображение сегмента не в \mathbb{R}^3 , а в \mathbb{R}^2 (удовлетворяющее перечисленным в определении условиям). Множество значений такого отображения называется *плоской* гладкой ориентированной кривой.

4. Уравнения (11.2.1) называются *параметрическими* уравнениями кривой, а переменная t – *параметром*.

Определение. Если *гладкая* кривая задана отображением $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $t_0 \in [a, b]$, то *ненулевой* вектор $r'(t_0)$ называется *касательным вектором* к этой кривой в ее точке $r(t_0)$.

Пример. Рассмотрим график непрерывно дифференцируемой функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Это множество на плоскости – образ сегмента $[a, b]$ при отображении

$$x = r(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}, \quad \text{причем} \quad r'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix} \neq \theta.$$

Поэтому такой график – гладкая плоская кривая.

Как известно, касательная к графику в точке $x^{(0)} = [t_0, f(t_0)]^T$ задается уравнением

$$x_2 - f(t_0) = f'(t_0) \cdot (x_1 - t_0) \quad \text{или} \quad \frac{x_2 - f(t_0)}{x_1 - t_0} = \frac{f'(t_0)}{1}.$$

Поэтому векторы $x - x^{(0)} = [x_1 - t_0, x_2 - f(t_0)]^T$ и $r'(t_0) = [1, f'(t_0)]^T$ линейно зависимы, т.е. касательная к кривой в точке $x^{(0)} = r(t_0)$ параллельна направленному отрезку $\overrightarrow{r'(t_0)}$ (рис.11.4). Можно показать, что этот факт имеет место и в общем случае.

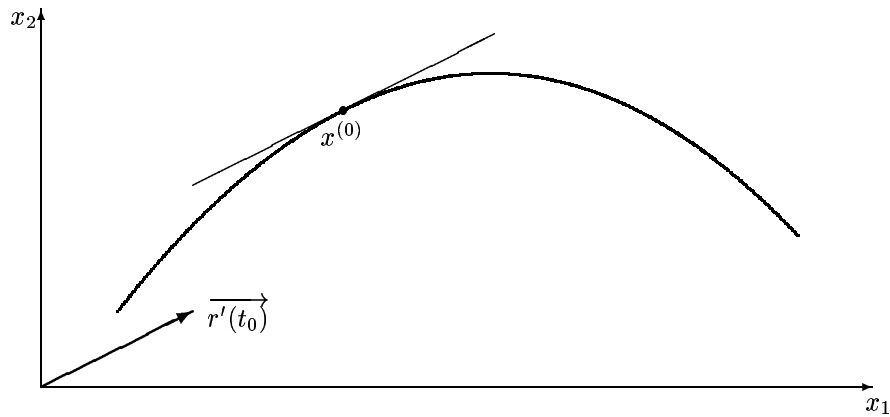


Рис. 11.4

Замечания. 1. Условие $r'(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$ обеспечивает существование касательной к кривой во всех ее точках и, таким образом, оправдывает название “гладкая кривая”. При нарушении этого условия у кривой может не быть касательной даже при непрерывно дифференцируемом отображении r . Проверьте, что кривая на рис. 11.5 есть образ отображения

$$r(t) = [t \cdot |t|, t^2]^T, \quad t \in [-1, 1] \quad (r'(0) = \theta).$$

2. Наряду с гладкими кривыми в содержательных задачах встречаются *кусочно гладкие*. Мы будем называть кусочно гладкой кривой объединение конечного числа гладких кривых, которые

- 1) образуют упорядоченный набор,
- 2) не пересекают друг друга и
- 3) сцеплены между собой так, что конец предыдущего куска является началом следующего.

Если конец последнего куска совпадает с началом первого, то кусочно гладкая кривая называется *замкнутой*.

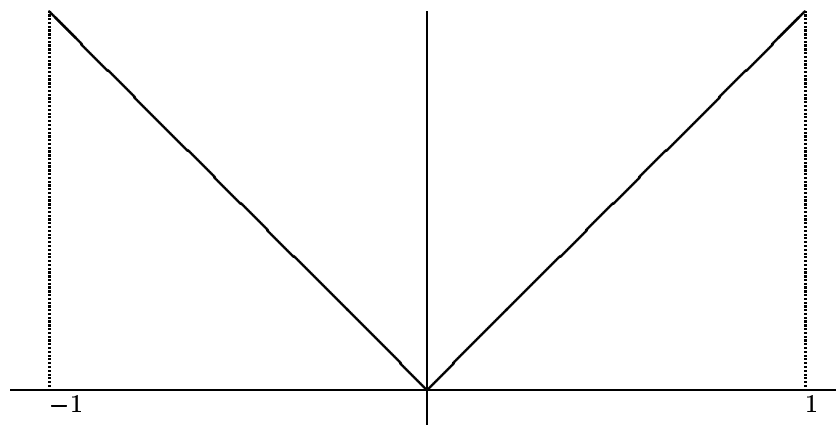


Рис. 11.5

Пример. Граница квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ – кусочно гладкая (плоская, замкнутая) кривая, состоящая из четырех кусков (отрезков прямых).

ПУТЬ. В приложениях к механике естественно считать параметр временем, а также отказаться от требования взаимной однозначности отображения $t \rightarrow r(t)$.

Определение. *Гладким путем* называется непрерывно дифференцируемое отображение сегмента в \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2), производная которого не обращается в нуль. Аналогично определим *плоский* гладкий путь.

Множество значений гладкого пути – множество точек в \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2) – называется *носителем* этого пути. Удобно представлять себе носитель пути как “рельсы”, по которым движется точка. Например, два различных плоских пути

$$t \in [0, 2\pi]; \quad r_1(t) = [\cos(t), \sin(t)]^T, \quad r_2(t) = [\cos(2t), \sin(2t)]^T$$

имеют один и тот же носитель - окружность единичного радиуса с центром в начале координат, но первая точка проходит эту окружность один раз, а вторая - дважды (за то же время). Вектор $r'(t)$ есть мгновенная скорость движения точки. Проверьте, что в нашем примере $\|r'_1(t)\| = 1$, $\|r'_2(t)\| = 2$.

Замечания. 1. В математике невозможно "пройти один и тот же путь с разными скоростями"! Это будут разные пути (хотя и с общим носителем).

2. *Кусочно гладкий* путь определяется аналогично кусочно гладкой кривой.

3. Отображение, задающее гладкую кривую, является, очевидно, гладким путем. В этом случае вектор скорости совпадает с касательным вектором кривой.

11.3. Поверхность

Придать точный смысл общему понятию "поверхность" еще сложнее, чем понятию "кривая". Мы ограничимся частным случаем.

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - часть плоскости, ограниченная замкнутой кусочно гладкой кривой. *Гладкой поверхностью* $G = r(\Omega)$ называется образ множества Ω в \mathbb{R}^3 при отображении

$$r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x_1 = r_1(u) \\ x_2 = r_2(u) \\ x_3 = r_3(u) \end{cases}, \quad (11.3.1)$$

обладающем следующими свойствами:

- 1) взаимная однозначность ($r(u) = r(v) \implies u = v$);
- 2) непрерывная дифференцируемость;
- 3) *линейная независимость* столбцов матрицы Якоби (Dr).

Замечание. Эти условия могут нарушаться на границе Ω .

Примеры. 1. $r : [0, 2\pi] \times [0, H] \rightarrow \mathbb{R}^3$;

$$r(\varphi, z) = [R \cdot \cos(\varphi), R \cdot \sin(\varphi), z]^T, \quad Dr(\varphi, z) = \begin{bmatrix} -R \cdot \sin(\varphi) & 0 \\ R \cdot \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверьте, что это отображение задает боковую поверхность прямого кругового цилиндра высоты H и радиуса R . Заметьте, что $r(2\pi, z) \equiv r(0, z)$.

2. $r : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$;

$$r(\theta, \varphi) = [R \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), R \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi), R \cdot \cos(\theta)]^T.$$

Проверьте, что это отображение задает сферу радиуса R с центром в начале координат, причем $r(0, \varphi) \equiv [0, 0, R]^T$ - "северный полюс", $r(\pi, \varphi) \equiv [0, 0, -R]^T$ - "южный полюс", $r(\theta, 0) \equiv r(\theta, 2\pi)$ - "нулевой меридиан", $r(\pi/2, \varphi)$ - "экватор".

Убедитесь, что столбцы матрицы

$$Dr(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & -R \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ R \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) & R \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ -R \cdot \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

линейно независимы во всех точках сферы, кроме полюсов.

Пусть a - внутренняя точка Ω . Рассмотрим сужения отображения r на отрезки, проходящие через эту точку параллельно осям Ou_1 и Ou_2 : $\rho_1(u_1) = r(u_1, a_2)$, $\rho_2(u_2) = r(a_1, u_2)$ (рис.1.6). Их образы - кривые, проходящие через точку $A = r(a)$ и лежащие на поверхности G . Легко видеть, что касательные векторы к этим кривым - столбцы матрицы Якоби отображения r :

$$\rho'_1(u_1) = D_1 r(u_1, a_2), \quad \rho'_2(u_2) = D_2 r(a_1, u_2).$$

В силу линейной независимости векторов $D_1 r(a)$ и $D_2 r(a)$ соответствующие им направленные отрезки не коллинеарны и определяют единственную плоскость, проходящую через точку A . Ее называют *касательной плоскостью* к поверхности G в точке A .

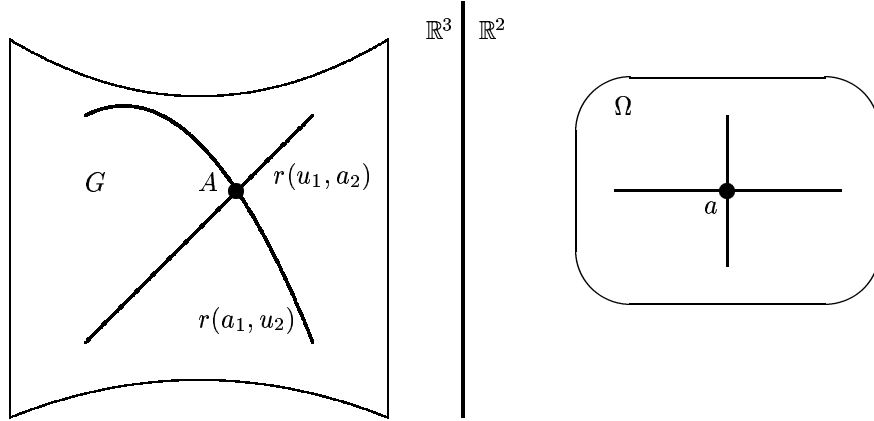


Рис.11.6

Пример. Пусть G – график непрерывно дифференцируемой функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда поверхность G задается отображением

$$r(u_1, u_2) = [u_1, u_2, f(u_1, u_2)]^T, \text{ причем}$$

$$Dr(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1 f(a) & D_2 f(a) \end{bmatrix} \quad a \in \Omega.$$

Очевидно, что столбцы матрицы $Dr(a)$ линейно независимы, и вектор $v = [D_1 f(a), D_2 f(a), -1]^T$ ортогонален им обоим. Следовательно, соответствующий направленный отрезок перпендикулярен касательной плоскости к поверхности G в ее точке $A = r(a)$. Из курса линейной алгебры известно, что уравнение этой плоскости имеет вид

$$\langle x - r(a), v \rangle = 0$$

или

$$x_3 - f(a_1, a_2) = D_1 f(a_1, a_2) \cdot (x_1 - a_1) + D_2 f(a_1, a_2) \cdot (x_2 - a_2). \quad (11.3.2)$$

Пусть, например, $f(x_1, x_2) = x_1^2/4 + x_2^2/9$ (график этой функции – эллиптический параболоид). Убедитесь, что точка $(2, 3, 2)$ лежит на параболоиде. Проведем в этой точке касательную плоскость к параболоиду (напишем уравнение этой плоскости). Здесь

$$Df(x_1, x_2) = \left[\frac{2x_1}{4}, \frac{2x_2}{9} \right], \quad D_1 f(2, 3) = 1, \quad D_2 f(2, 3) = 2/3.$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$x_3 - 2 = 1 \cdot (x_1 - 2) + 2/3 \cdot (x_2 - 3) \quad \text{или} \quad x_1 + 2/3 \cdot x_2 - x_3 = 2.$$

Замечания. 1. Условие линейной независимости векторов $D_1 r$ и $D_2 r$ обеспечивает наличие касательной плоскости во всех точках поверхности и, таким образом оправдывает название „гладкая поверхность“.

2. Можно рассматривать *кусочно гладкие* поверхности, т.е. поверхности, состоящие из нескольких гладких кусков, сцепленных своими краями. Простейший пример кусочно гладкой поверхности – многогранник.

11.4. Композиция функций и ее производная

Пусть заданы векторные поля $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Тогда на \mathbb{R}^n определена их композиция – векторное поле $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

В соответствии с **Важным соглашением** (п.11.1) будем предполагать, что f и g непрерывно дифференцируемы. Тогда их производные (матрицы Якоби) имеют размеры $k \times m$ и $m \times n$ соответственно.

Известно, что в случае функций одной переменной непрерывная дифференцируемость функций f и g влечет за собой непрерывную дифференцируемость их композиции $h = g \circ f$, причем (п.8.2)

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Можно показать, что в многомерном случае имеет место аналогичная

Теорема. Если функции f и g имеют непрерывные производные, то их композиция $h = g \circ f$ также непрерывно дифференцируема, причем

$$h' = (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'. \quad (11.4.1)$$

(Проверьте согласованность размеров перемножаемых матриц Якоби!)

Примеры. 1. Пусть даны числовые матрицы A (размера $m \times n$) и B (размера $k \times m$); $f(x) = Ax$, $g(y) = By$. Тогда

$$h(x) = (g \circ f)(x) = B(Ax) = (BA)x \quad (BA - \text{матрица размера } k \times n).$$

Из примера 1 (п.11.1) следует, что

$$f'(x) = A, \quad g'(y) = B, \quad h'(x) = BA.$$

2. Пусть гладкая кривая задана отображением $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, а непрерывно дифференцируемая функция f взаимно однозначно отображает $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$, причем f' не обращается в нуль. Тогда композиция $\rho = r \circ f$ задает ту же кривую. При этом по формуле (11.4.1)

$$\rho'(t) = r'(f(t)) \cdot f'(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

откуда видно, что касательные векторы $\rho'(t)$ и $r'(f(t))$ различны, но *линейно зависимы*. Поэтому соответствующие им направленные отрезки коллинеарны, и, следовательно, задают одну и ту же касательную к кривой.

Матричное соотношение (11.4.1) может быть записано в координатной форме:

$$D_j(g \circ f)_i(x) = [D_1 g_i(f(x)), \dots, D_m g_i(f(x))] \cdot \begin{bmatrix} D_j f_1(x) \\ \vdots \\ D_j f_m(x) \end{bmatrix} \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n).$$

Оперировать *матричным* соотношением (11.4.1) гораздо проще, однако при "ручном" счете может возникнуть потребность и в его *координатной* форме.

11.5. Понятие о конформном отображении

В этом пункте координаты точки на плоскости обозначаются x и y ($z = x + iy$).

Напомним, что аналитическая функция была введена нами в п.7.1 как сумма степенного ряда. Она определена в круге сходимости этого ряда и имеет там производные всех порядков. В частности,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (11.5.1)$$

Функция f порождает пару вещественных функций, заданных внутри круга сходимости:

$$F_1(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)), \quad F_2(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)).$$

Используя эти функции, можно переписать (11.5.1) в виде

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{F_1(x, y) - F_1(x_0, y_0) + i(F_2(x, y) - F_2(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

При одном порядке вычисления пределов получим

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_1(x, y) - F_1(x_0, y_0) + i(F_2(x, y) - F_2(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{F_1(x_0, y) - F_1(x_0, y_0) + i(F_2(x_0, y) - F_2(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} = \\ &= D_2 F_2(x_0, y_0) - i \cdot D_2 F_1(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (11.5.2)$$

Изменение порядка даст

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{x=x_0} \left(\lim_{y=y_0} \frac{F_1(x, y) - F_1(x_0, y_0) + i(F_2(x, y) - F_2(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)} \right) = \\
 &= \lim_{x=x_0} \frac{F_1(x, y_0) - F_1(x_0, y_0) + i(F_2(x, y_0) - F_2(x_0, y_0))}{x - x_0} = \\
 &= D_1 F_1(x_0, y_0) + i \cdot D_1 F_2(x_0, y_0).
 \end{aligned} \tag{11.5.3}$$

Из (11.5.2) и (11.5.3) вытекают тождества, известные как *условия Коши-Римана*³.

$$D_1 F_1(x, y) \equiv D_2 F_2(x, y) \equiv \operatorname{Re}(f'(z)), \quad D_1 F_2(x, y) \equiv -D_2 F_1(x, y) \equiv \operatorname{Im}(f'(z)).$$

Матрица Якоби отображения $F = [F_1, F_2]^T$ принимает теперь вид

$$F'(x, y) \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(f'(z)) & -\operatorname{Im}(f'(z)) \\ \operatorname{Im}(f'(z)) & \operatorname{Re}(f'(z)) \end{bmatrix}.$$

Матрица Грама для $F'(x, y)$ равна

$$(F'(x, y))^* \cdot F'(x, y) = |f'(z)|^2 \cdot I_2,$$

и, следовательно, если $f'(z) \neq 0$, то матрица $\frac{1}{|f'(z)|} \cdot F'(x, y)$ – ортогональная.

Рассмотрим теперь пару плоских кривых $z = r(t)$ и $z = s(\tau)$, проходящих через точку $z_0 = r(t_0) = s(\tau_0)$. Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между направленными отрезками, соответствующими касательным векторам к кривым в этой точке (рис.11.7а)

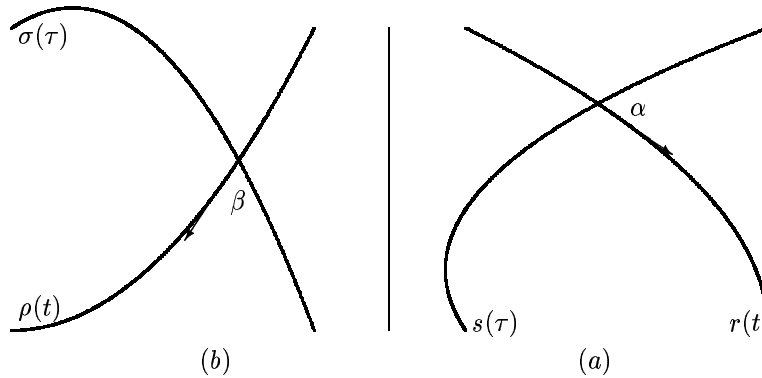


Рис.11.7

Из курса линейной алгебры известно, что

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle r'(t_0), s'(\tau_0) \rangle}{\|r'(t_0)\| \cdot \|s'(\tau_0)\|}.$$

Образы наших кривых при отображении F задаются композициями $\rho = F \circ r$ и $\sigma = F \circ s$ соответственно. Из теоремы о производной композиции имеем

$$\rho'(t_0) = F'(x_0, y_0) \cdot r'(t_0), \quad \sigma'(\tau_0) = F'(x_0, y_0) \cdot s'(\tau_0)$$

и, следовательно, косинус угла между этими образами в точке $\rho(t_0) = \sigma(\tau_0)$ равен (рис.11.7b)

$$\cos(\beta) = \frac{\langle \rho'(t_0), \sigma'(\tau_0) \rangle}{\|\rho'(t_0)\| \cdot \|\sigma'(\tau_0)\|}.$$

³Георг Фридрих Бернгард РИМАН (1826-1866) – немецкий математик, один из основателей неевклидовой геометрии. Автор многих фундаментальных результатов в различных разделах математики.

11.7. Формула Тейлора второго порядка

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим приращение функции f при переходе из точки $a \in \mathbb{R}^n$ в точку $a + h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a + h) - f(a).$$

Пусть этот переход происходит по "отрезку прямой" в \mathbb{R}^n

$$r(t) = a + t \cdot e, \quad 0 \leq t \leq \|h\|,$$

где $e = h/\|h\|$ – единичный вектор, сонаправленный с h .

Построим функцию

$$\phi = f \circ r; \quad \phi(t) = f(a + t \cdot e). \quad (11.7.1)$$

Тогда $f(a + h) - f(a) = \phi(\|h\|) - \phi(0)$. По формуле Тейлора второго порядка для функции ϕ

$$\phi(\|h\|) - \phi(0) = \phi'(0) \cdot \|h\| + \phi''(\xi) \cdot \frac{\|h\|^2}{2}, \quad (11.7.2)$$

где ξ – некоторая точка из интервала $]0, \|h\|]$.

По теореме о производной композиции

$$\phi'(t) = f'(a + t \cdot e) \cdot e, \quad \phi'(0) = f'(a) \cdot e. \quad (11.7.3)$$

Далее

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= (f'(a + t \cdot e) \cdot e)' = (e^T \cdot \nabla f(a + t \cdot e))' = \\ &= e^T \cdot (\nabla f(a + t \cdot e))' = e^T \cdot f''(a + t \cdot e) \cdot e. \end{aligned} \quad (11.7.4)$$

Подставляя значения функции ϕ и ее производных в (11.7.2), получим *формулу Тейлора второго порядка для скалярного поля* (сравните с 10.2.2)

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h^T \cdot f''(a + \xi \cdot e) \cdot h. \quad (11.7.5)$$

(Заметьте, что $f'(a)$, h^T – строки, $f''(a + \xi \cdot e)$ – квадратная матрица, а h – столбец, поэтому оба слагаемых в правой части (11.7.5) – числа).

Формулу (11.7.5) можно переписать иначе, используя понятие градиента

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \cdot \langle f''(a + \xi \cdot e) \cdot h, h \rangle = \\ &= f(a) + \langle \nabla f(a), e \rangle \cdot \|h\| + \langle f''(a + \xi \cdot e) \cdot e, e \rangle \cdot \frac{\|h\|^2}{2}. \end{aligned} \quad (11.7.6)$$

Если $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – векторное поле, то, объединив формулы (11.7.5) для всех его компонент, получим формулу Тейлора

$$F(a + h) = F(a) + F'(a) \cdot h + \alpha \cdot \frac{\|h\|^2}{2}, \quad (11.7.7)$$

где $F' = (m \times n)$ -матрица Якоби, α – m -мерный вектор, компоненты которого выражаются через значения вторых производных компонент поля F .

Формула Тейлора позволяет доказать теорему о локальных экстремумах скалярного поля (сравните ее с теоремой Ферма).

Теорема. Если $\nabla f(a) \neq \theta$, то в точке a скалярное поле f не имеет экстремума.

Доказательство. Положим в формуле (11.7.6) $h = t \cdot \nabla f(a)$

$$f(a + h) - f(a) = \|\nabla f(a)\|^2 \left(1 + \langle f''(a + \xi \cdot e) \cdot e, e \rangle \cdot \frac{t}{2}\right) \cdot t.$$

Обозначим

$$M_2 = \sup_{\xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |\langle f''(a + \xi \cdot e) \cdot e, e \rangle|, \quad \text{где } \varepsilon = \|\nabla f(a)\|.$$

Тогда при достаточно малых значениях $|t|$ ($|t| < \frac{2}{M_2}$) выражение в скобках положительно и, следовательно,

$$\text{sign}(f(a+h) - f(a)) = \text{sign}(t).$$

Последнее равенство говорит о том, что приращение функции меняет знак в любой окрестности точки a , т.е. в этой точке нет экстремума.

Замечания. 1. Точки, в которых $\nabla f = \theta$, называются стационарными точками функции f .

2. Мы доказали теорему в предположении существования *второй* производной у функции f . Однако она справедлива и при наличии у f *лишь первой непрерывной* производной.

11.8. Формула Тейлора третьего порядка для скалярного поля.

Исследование гладкого функционала в окрестности стационарной точки

Запишем для функции ϕ (см. 11.7.1) формулу Тейлора третьего порядка

$$\phi(\|h\|) - \phi(0) = \phi'(0) \cdot \|h\| + \phi''(0) \cdot \frac{\|h\|^2}{2!} + \phi^{(3)}(\xi) \cdot \frac{\|h\|^3}{3!}$$

и вычислим с ее помощью приращение скалярного поля :

$$f(a+h) - f(a) = \phi(\|h\|) - \phi(0).$$

Согласно (11.7.3) и (11.7.4) имеем

$$\phi'(0) = f'(a)e, \quad \phi''(0) = e^T f''(a)e$$

(напомним, что $e = \frac{h}{\|h\|}$ – единичный вектор, сонаправленный с h).

В силу **Важного соглашения** f имеет непрерывные частные производные третьего порядка, т.е. $\phi^{(3)}$ существует и непрерывна.

Имеем

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{1}{2!}h^T \cdot f''(a)h + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h\|^3}{3!} \quad (11.8.1)$$

или

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2!} \langle f''(a)h, h \rangle + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h\|^3}{3!}$$

(здесь по-прежнему ξ – некоторая точка на интервале $]0, \|h\|]$).

Формула (11.8.1) называется *формулой Тейлора третьего порядка для скалярного поля*.

Исследуем с помощью этой формулы вопрос о наличии экстремума функции f в стационарной точке a . Так как $\nabla f(a) = \theta$, то

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \langle f''(a)h, h \rangle + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h\|^3}{6}$$

Из курса линейной алгебры известно, что квадратичная форма удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\min} \|h\|^2 \leq \langle f''(a)h, h \rangle \leq \lambda_{\max} \|h\|^2,$$

где λ_{\min} и λ_{\max} – наименьшее и наибольшее собственные числа *симметричной* матрицы Гессе $f''(a)$.

Если матрица $f''(a)$ положительно определена, то $\lambda_{\min} > 0$ и

$$f(a+h) - f(a) > \frac{\lambda_{\min}}{2} \cdot \|h\|^2 + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h\|^3}{6} = \left(\frac{\lambda_{\min}}{2} + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h\|}{6} \right) \|h\|^2.$$

Можно взять вектор h настолько малым по норме, чтобы обеспечить выполнение неравенства $\frac{\lambda_{\min}}{2} + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h\|}{6} > 0$ в окрестности точки a . В этой окрестности $f(a+h) - f(a) > 0$, если $h \neq \theta$, т.е. функция f имеет в *стационарной* точке a локальный минимум. Аналогично можно показать, что в случае *отрицательно* определенной матрицы Гессе $f''(a)$ функция f имеет в *стационарной* точке a локальный максимум.

Если матрица Гессе знакопеременна, т.е. среди ее собственных чисел есть хотя бы одно отрицательное (обозначим его λ_m) и хотя бы одно положительное (обозначим его λ_p), то, выбрав в качестве h собственный вектор h_p этой матрицы, соответствующий λ_p , получим

$$f(a+h_p) - f(a) = \frac{\lambda_p}{2} \|h_p\|^2 + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h_p\|^3}{6} = \left(\frac{\lambda_p}{2} + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h_p\|}{6} \right) \|h_p\|^2.$$

Взяв вектор h_p достаточно малым по норме, получим

$$f(a + h_p) - f(a) > 0.$$

Выбрав в качестве h собственный вектор h_m матрицы Гессе, соответствующий λ_m , получим

$$f(a + h_m) - f(a) = \left(\frac{\lambda_m}{2} + \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h_m\|}{6} \right) \|h_m\|^2.$$

Взяв вектор h_m достаточно малым по норме, получим

$$f(a + h_m) - f(a) < 0.$$

Мы показали, что приращение функции f меняет знак в любой окрестности точки a . Следовательно, в этой точке локального экстремума нет.

Если матрица Гессе полуопределенная (имеет хотя бы одно нулевое собственное число λ_0 , а все ненулевые – одного знака), то выбрав в качестве h ее собственный вектор h_0 , соответствующий λ_0 , получим

$$f(a + h_0) - f(a) = \phi^{(3)}(\xi) \frac{\|h_0\|^3}{6}.$$

Видно, что формула Тейлора *третьего* порядка в этом случае не дает возможности судить о знаке приращения функции в окрестности стационарной точки. Использование же формулы Тейлора более высоких порядков выходит за рамки нашего курса.